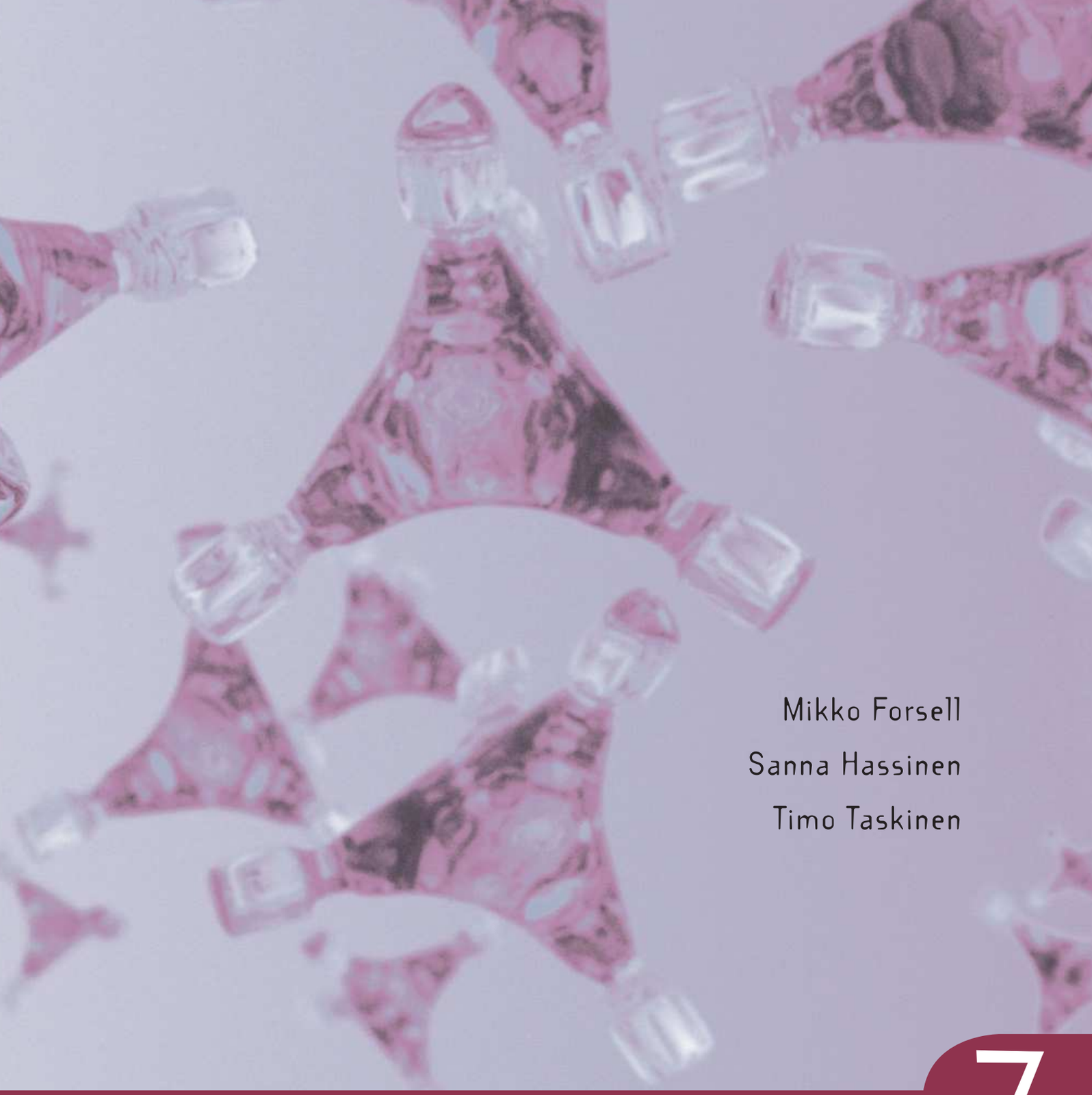


Mikko Forsell
Sanna Hassinen
Timo Taskinen

LUKION LYHYT MATEMATIIKKA 7

SIGMA

Talousmatematiikka

Sanoma Pro Oy • Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro O

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-0330-7 Sigma 7

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1955-1
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1956-8

Toimitus: Sanna Mäkitalo
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva
Kannen kuva: Getty Images
Piirrokset: Pekka Könönen ja Eila Sinivuori

Valokuvat: Frank Chumura/Lehtikuva (s. 9), iStockphoto (s. 11, 18, 39, 50, 61, 62, 84, 108, 109, 122), Juha Tuomi/Rodeo.fi (s. 94), Markku Könkkölä/Kuvaario (s. 27), Rovaniemen kaupunki (s. 25), Scandinavian StockPhoto (s. 13), SKOY/Corbis (s. 92, 156), Vesa Greis/Kuvaliiteri (s. 96)

© Mikko Forsell, Sanna Hassinen, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot

Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Sisällys

1 Johdanto 7

2 Verotus 10
2.1 Kertaus prosenttilaskennasta 10
Tehtäviä 15
2.2 Ansiotulojen verotus 19
Tehtäviä 25
2.3 Muut verot 28
Tehtäviä 36
Keskeisiä käsitteitä 40

3 Korkolasku 41
3.1 Yksinkertainen korkolasku 41
Tehtäviä 48
3.2 Koronkorkolasku 52
Tehtäviä 62
Keskeisiä käsitteitä 65

4 Sijoittaminen ja rahoitus 66
4.1 Sijoittaminen 66
Tehtäviä 80
4.2 Erilaisia lainoja 83
Tehtäviä 95
Keskeisiä käsitteitä 99

5 Raha ja sen arvo 100
5.1 Valuutat 100
Tehtäviä 109
5.2 Indeksilaskenta 113
Tehtäviä 120
5.3 Inflaatio ja rahan arvo 125
Tehtäviä 135
Keskeisiä käsitteitä 138

6 Kertausosa 139

7 Ekstrat 151

Tehtävien vastaukset 176

Hakemisto 180

Alkusanat

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen, kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoa. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

Pohdinta

Osa kirjan alaluvuista alkaa pohdintatehtävillä. Niiden tarkoituksena on yleensä johdatella opetettavaan aiheeseen ja herättää kysymyksiä. Opettaja voi käyttää tehtäviä osana opetusta, tai opiskelija voi tutustua tehtäviin itsenäisesti.

Teoria

Teoria on jaettu aihekokonaisuuksiin sivuotsikoiden avulla. Näin eri osa-alueet löytyvät helpommin. Suuremmat kokonaisuudet voidaan otsikoiden avulla jakaa sopiviin opetuskokonaisuuksiin.

Tehtävät

Tehtävät on koottu sivuotsikoiden avulla kokonaisuuksiksi, joista on helppo valikoida sopivat tehtävät aihepiirin ja vaikeusasteen mukaan.

120. Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla.

E1 Joidenkin harjoitustehtävien edessä olevan esimerkkiviittauksen tarkoituksena on tukea harjoittelemista sekä oppitunnilla että kotona. Jokaista kirjan esimerkkiä vastaa tehtäväosiossa samantyyppinen tehtävä.

Kirjassa on mukana tehtäviä, jotka on tarkoitus tehdä tietokoneen avulla.

Kirjassa on mukana myös vanhoja ylioppilastehtäviä. Ylioppilaskokeen vuosi ja tehtävänumero on ilmoitettu tehtävänannon lopussa, esimerkiksi [K2009, 14].

Sekalaisia tehtäviä

Tehtäväosion lopussa on sekalaisia tehtäviä -osio, johon on koottu muutama tehtävä koko alaluvun aihealueista.

Keskeisiä käsitteitä

Jokainen luvun lopussa on käsitekartta, joka kokoaa luvun keskeiset käsitteet.

Kertausosa

Kirjan lopussa olevaan kertausosaan on koottu lyhyesti kunkin luvun tärkeimmät asiat. Jokaiseen lukuun liittyy lisäksi kertaustehtäviä.

Ekstrat

Kirjan loppuun on koottu ekstraluvuksi kurssiin liittyää oheismateriaalia. Ekstroja voi tarpeen mukaan käyttää joko opetuksessa tai opiskelijan omana lukemistona. Teoriaosassa on viittauksia ekstralukuun.

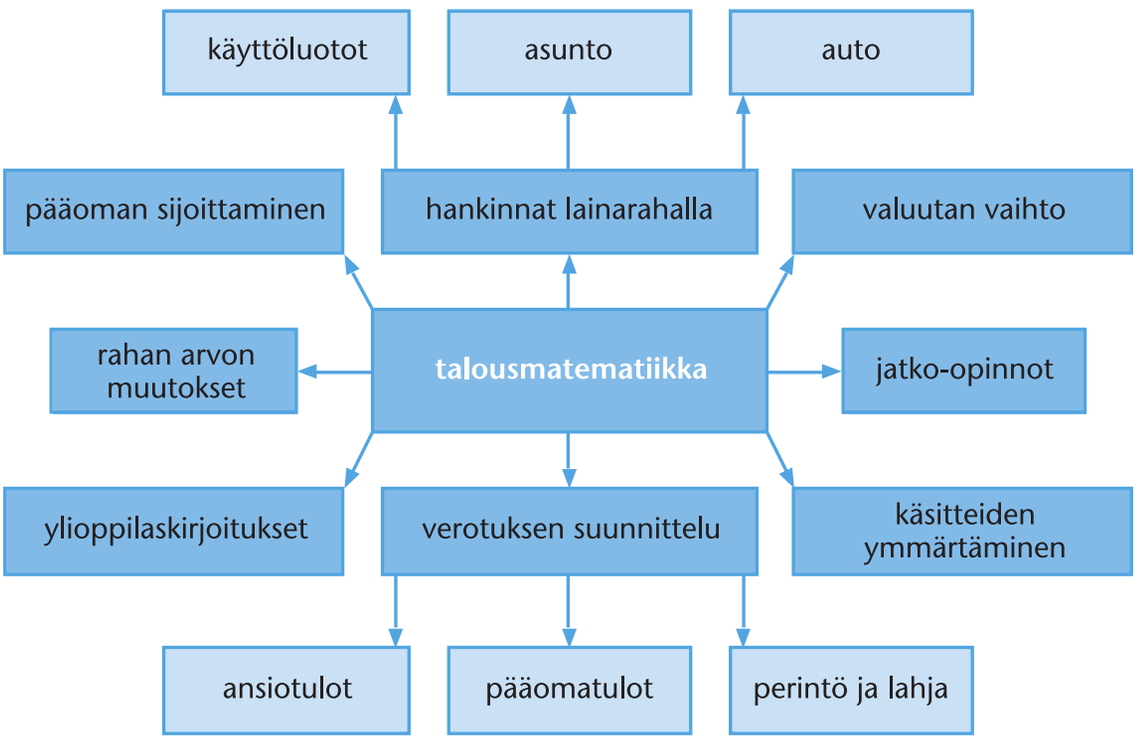
Helsingissä kesäkuussa 2010

Tekijät

Talousmatematiikka – osa arkielämää

Miksi talousmatematiikkaa?

Talousmatematiikan kurssi sisältää paljon hyödyllistä tietoa oman talouden hoitamiseen sekä jatko-opintoihin. Seuraavaan kaavioon on koottu muutamia esimerkkejä.



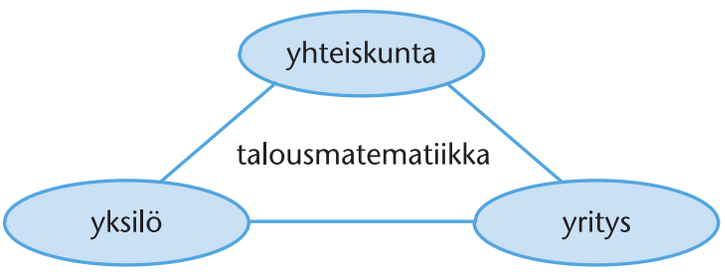
Kurssin erikoispiirteitä

Talousmatematiikan kurssilla on hyvä kiinnittää huomiota ainakin seuraaviin asioihin:

- Kun käsitellään rahaa, tarkkuus on yleensä kahden desimaalin tarkkuus. Tästä syystä tällä kurssilla saatetaan usein pyöristää lukuja kesken laskun.
- Tehtävissä annetut rahamäärät ovat yleensä aina tarkkoja. Jos tehtävässä on annettu rahamääräksi esimerkiksi 100 €, tämä tarkoittaa yleensä tasan sataa euroa eli 100,00 €. Tämä on otettava huomioon vastauksen tarkkuudessa.
- Kurssi sisältää paljon prosenttilaskentaa. Perusarvon käsite on tärkeää ymmärtää ja muistaa jokaisessa tilanteessa.
- Erilaisia muutoksia käsiteltäessä on kiinnitettävä huomiota siihen, mikä rahamäärä muuttuu, milloin ja kuinka paljon.

1 Johdanto

Lähes kaikkia ympärillämme tapahtuvia asioita ja ilmiöitä voidaan tarkastella taloudellisesta näkökulmasta. Tässä kirjassa taloudellisia asioita ja ilmiöitä tarkastellaan kolmesta eri näkökulmasta: yksilön, yhteiskunnan ja yrityksen.



Yksilön näkökulmasta ansiotulojen verotus, sijoittaminen ja lainaaminen tulevat kaikille tutuiksi elämän eri vaiheissa. Kuinka paljon veroa maksetaan kesätöistä? Saadaanko veronpalautusta vai maksetaanko jäännösveroa? Onko asuntolainan korko sidottu euriboriin vai pankin primekorkoon? Mikä on Englannin punnan valuuttakurssi euroissa? Tässä kirjassa tutustutaan matematiikan näkökulmasta mm. ansiotulojen verotukseen, erilaisiin laina- ja talletusvaihtoehtoihin sekä valuuttalaskentaan.

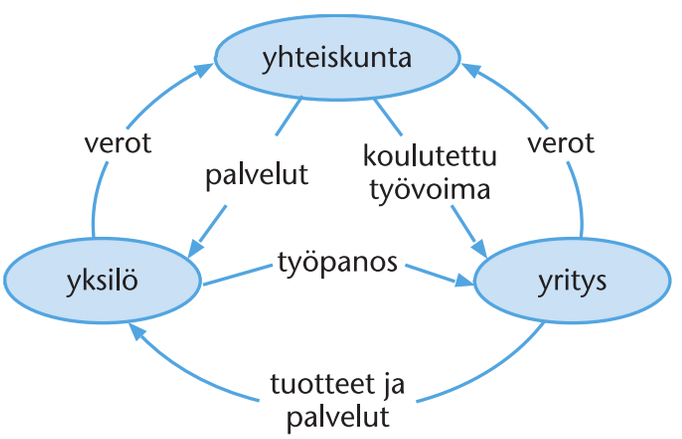
Yhteiskunnan näkökulma liittyy läheisesti yleiseen talouden sääntelyyn sekä tulo- ja menovirtojen hallintaan. Hyvinvointiyhteiskuntamme kaksi keskeisintä elementtiä ovat korkeatasoiset ja kaikkien saatavilla olevat julkiset palvelut sekä tuloeroja tasoittavat tulonsiirrot. Julkisiin palveluihin kuuluvat mm. terveydenhuolto- ja koulujärjestelmät, kirjastot, vesihuoltojärjestelmä, tieverkosto, rautatiet ja lentokentät sekä poliisi ja palokunta.

Työttömyyskorvaukset, asumistuki, kansaneläke ja lapsilisät ovat esimerkkejä tulonsiirroista, joita yhteiskunta tekee. Rahoittaakseen palvelut ja tulonsiirrot yhteiskunta kerää tuloja monella tavalla, kuten veroina ja tullimaksuina. Arvonlisä-, tulo-, alkoholi-, auto-, polttoaine- ja lentokenttävero ovat esimerkkejä niistä veroista, joilla yksilöiltä ja yrityksiltä kerätään rahaa yhteiskunnan pyörittämiseen.

Tässä kirjassa esitellään keskeisimmät verot ja tutustutaan verojen matematiikkaan.

Yrityksen näkökulmasta talouden tarkasteluun voidaan liittää lukuisia erilaisia asioita. Yrityksen ja sen tuotteiden kannattavuuden suunnittelu, lakisääteinen kirjanpito ja investointilaskenta ovat esimerkkejä yritykseen liittyvistä taloudellisista tarkasteluista. Yrityksen toimintaan kuuluvat läheisesti myös verotuksen sekä rahan lainaamiseen ja tallentamiseen liittyvät matemaattiset tarkastelut. Kuinka monta tuotetta yrityksen pitää myydä, jotta se tekisi voittoa? Mikä on tilikauden tulos? Kannattaako investoida uuteen koneeseen vai korjata nykyistä? Tässä kirjassa keskitytään yrityksen näkökulmasta erityisesti katetuotto- ja investointilaskennan esittelyyn. Lainoja ja talletuksia käsitellään enemmän yksilön näkökulmasta, mutta on hyvä muistaa, että vastaavat rahoituksen asiat ovat arkipäivää myös yrityksissä.

Kirjan kolme näkökulmaa ovat läheisesti vuorovaikutus- ja riippuvuussuhteessa toisiinsa. Yhteiskunta säätelee verotuksen ja tulonsiirtojen avulla yksilöiden sekä yritysten käytettävissä olevia varoja. Keräämällä tullimaksuja tai ansiotuloista verotuloja yhteiskunta pystyy esimerkiksi tarjoamaan kouluopetusta meille kaikille. Toisaalta yritykset tarjoavat meille ostettaviksi ja kulutettaviksi erilaisia tuotteita ja palveluita. Samaan aikaan yhteiskunta tukee yrityksiä kouluttamalla osaavaa työvoimaa näiden käyttöön. Yksilön kannalta työpaikka taas on merkittävä asia jo pelkästään työstä saatavien tulojen vuoksi. Yksilöiden käytössä olevat varat mahdollistavat ostamisen ja luovat tuotteille kysynnän. Kysyntä puolestaan synnyttää tarjonnan ja luo puitteet yritystoiminnalle. Työllisyyden ja kannattavan yritystoiminnan myötä yhteiskunta varmistaa tulojensa saannin.



Suomalainen yhteiskunta, osaaminen ja talouden hallinta nostavat meidät vuosi vuoden jälkeen erilaisissa vertailuissa maailman kilpailukykyisimpien maiden joukkoon. Miksi? Syynä voidaan pitää hyvää tasapainoa yksilöiden, yritysten ja yhteiskunnan välillä.

Kaikki tahot tarvitsevat tuloja omien menojensa kattamiseen. Koska tulot ja menot tavallisesti syntyvät eri aikaan ja erisuuruisina, rahoitusta tarvitaan tulo–meno-liikenteen hallintaan. Edellisen sivun kuviossa on esitetty, mitä tuloja, menoja ja rahoitusvaihtoehtoja kukin näkökulma pitää sisällään. Olennaista kaaviossa on se, että kaikki näkökulmat lähestyvät samoja taloudellisia asioita ja päätöksiä. Erona on taloudellisessa mielessä lähinnä suuruusluokka.

	Yksilö	**Yritys**	**Yhteiskunta**
Tulot	kesätyö lahjat perintö korkotulot	myyntitulot korkotulot	verotulot – yrityksiltä – välillisesti – tullit
Menot	ruoka vaatteet asuminen	palkat valmistusaineet vuokrat	koulutus terveydenhuolto eläkkeet
Tulojen/menojen hallinta	pankkilaina sijoitusrahasto	osakeanti pankkilaina	joukkovelka-kirjalainat lainat ulkomailta

2 Verotus

2.1 Kertaus prosenttilaskennasta

Peruskäsitteitä

Suhteellisten osuuksien ilmoittamiseen käytetään usein prosentteja. Prosentti tarkoittaa sadasosaa eli

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Prosenttilaskuissa voidaan erottaa kaksi perustilannetta:

- lukujen vertailu prosentteina
- prosenttiosuuden laskeminen luvusta.

Suhteellisen osuuden laskemiseksi tarvitaan aina jokin arvo, johon muita arvoja verrataan. Tätä arvoa kutsutaan **perusarvoksi**.

Mitä verrataan?
Mihin verrataan?

Kuinka monta prosenttia luku *b* on luvusta *a*?	**Kuinka paljon on *p* prosenttia luvusta *a*?**
• Kahta lukua verrattaessa lasketaan ensin näiden lukujen suhde. • Suhteen arvo muutetaan prosenteiksi kertomalla se sadalla prosentilla. • Perusarvona on luku, johon verrataan.	• Prosenttimerkintä *p* % muutetaan ensin desimaaliluvuksi. Tätä lukua kutsutaan **prosenttikertoimeksi.** • Prosenttiosuus saadaan kertomalla perusarvo prosenttikertoimella.
$\frac{b}{a} \cdot 100\,\%$	$\frac{p}{100} \cdot a$
Luku 5 on 25 % luvusta 20, koska $\frac{5}{20} \cdot 100\,\% = 25\,\%$.	45 % luvusta 80 on 36, koska $\frac{45}{100} \cdot 80 = 0{,}45 \cdot 80 = 36$.

ESIMERKKI 1 Kaisa osti torilta mansikoita. Mansikoiden litrahinta oli 2,30 €. Kauppias kuitenkin lupasi 1,50 € alennusta ostoksista, jos Kaisa ostaisi mansikoita 5 litraa. Kuinka monta prosenttia alennus oli?

RATKAISU Lasketaan ensin, kuinka paljon 5 litraa mansikoita olisi maksanut ilman alennusta.

$$5 \cdot 2{,}30\ € = 11{,}50\ €$$

Kauppiaan lupaama alennus 1,50 € on perusarvosta 11,50 € prosentteina

$$\frac{1{,}50\ €}{11{,}50\ €} = 0{,}1304\ldots \approx 13\ \%$$

VASTAUS Alennus oli 13 %.

ESIMERKKI 2 Erään pörssiyhtiön osakkeen arvo oli pörssin avautuessa 12,75 €. Päivän päättyessä osakkeen arvo laski 9,6 %. Kuinka paljon osakkeen hinta laski euroina?

RATKAISU Osakkeen arvo laski 9,6 %. Prosenttikerroin on siis 0,096.

Osakkeen hinta aleni

$$0{,}096 \cdot 12{,}75\ € = 1{,}224\ € \approx 1{,}22\ €$$

VASTAUS Osakkeen hinta aleni 1,22 €.

Rahalaskuissa vastaus ilmoitetaan yleensä sentin tarkkuudella.

Talousmatematiikassa tarkastellaan paljon erilaisten suureiden muutoksia. Kun tarkasteltavan suureen arvo muuttuu p %, muuttunut arvo voidaan ilmaista prosenttikertoimen ja perusarvon avulla. Muuttunut arvo saadaan, kun perusarvo kerrotaan muutosta kuvaavalla prosenttikertoimella.

Perusarvo a kasvaa p %.	**Perusarvo a pienenee p %.**
• Prosenttikerroin saadaan, kun 100 prosenttiin listätään prosenttiluku p.	• Prosenttikerroin saadaan, kun 100 prosentista vähennetään prosenttiluku p.
$\left(\frac{100+p}{100}\right)\cdot a = \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot a$	$\left(\frac{100-p}{100}\right)\cdot a = \left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot a$
Tuotteen alkuperäinen hinta on 10 €. Kun tuotteen hinta nousee 20 %, hinta muutoksen jälkeen on $\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdot 10\ € = 1{,}2\cdot 10\ € = 12\ €$	Tuotteen alkuperäinen hinta on 10 €. Kun tuotteen hinta laskee 20 %, hinta muutoksen jälkeen on $\left(1-\frac{20}{100}\right)\cdot 10\ € = 0{,}8\cdot 10\ € = 8\ €$

Prosenttiosuuksien vertailussa käytetään **prosenttiyksikköä**.

ESIMERKKI 3

Emmalla on asuntolaina pankissa A. Lainan kuukausittainen maksuerä on 1200 €.

a) Kuukausittainen maksuerä nousee 1,5 %. Laske uuden maksuerän suuruus.

b) Asuntolainan vuosikorko pankissa A on 3,80 %. Kilpaileva pankki B tarjoaa vuosikoroksi 3,50 %. Kuinka monta prosenttia edullisempi on pankin B vuosikorko?

RATKAISU

a) Uuden maksuerän suuruus on

100 % + 1,5 % = 101,5 % = 1,015

$$\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)\cdot 1200\ € = 1{,}015\cdot 1200\ € = 1218\ €$$

b) Verrataan pankin B vuosikorkoa pankin A vuosikorkoon.

Pankin B korko on 3,80 – 3,50 = 0,30 **prosenttiyksikköä** pienempi kuin pankin A korko.

$$\frac{3{,}50\ \%}{3{,}80\ \%} = 0{,}92105\ldots = 92{,}105\ldots\ \%$$

Pankin B vuosikorko on
100 % – 92,105… % = 7,894… % ≈ 7,89 % edullisempi.

VASTAUS

a) 1218 €

b) 7,89 % edullisempi

ESIMERKKI 4

Kauppias myy viinirypäleitä pienissä laatikoissa. Tukkutoimittaja pienentää pakkauslaatikkoa niin, että laatikkoon mahtuu 10 % vähemmän viinirypäleitä kuin ennen. Samalla kauppias laskeen laatikon hintaa 8,5 %. Kuinka paljon ja mihin suuntaan viinirypäleiden kilohinta muuttuu?

RATKAISU

Koska todellisia hintoja ja määriä ei tiedetä, merkitään niitä kirjaimilla a ja b.

- Hinta laskee 8,5 %. Laskua kuvaava prosenttikerroin:
  $100\ \% - 8{,}5\ \% = 91{,}5\ \% = 0{,}915$
- Määrä laskee 10 %. Laskua kuvaava prosenttikerroin:
  $100\ \% - 10\ \% = 90\ \% = 0{,}9$

Kootaan tiedot taulukkoon.

	Alussa	**Lopussa**
hinta (€)	a	$0{,}915\,a$
määrä (kg)	b	$0{,}90\,b$
kilohinta (€/kg)	$\frac{a}{b}$	$\frac{0{,}915a}{0{,}90b} = 1{,}0166\ldots\frac{a}{b}$

Uusi kilohinta $1{,}0166\ldots\frac{a}{b}$ on $101{,}66\ldots$ % vanhasta kilohinnasta.

Kilohinta on siis noussut

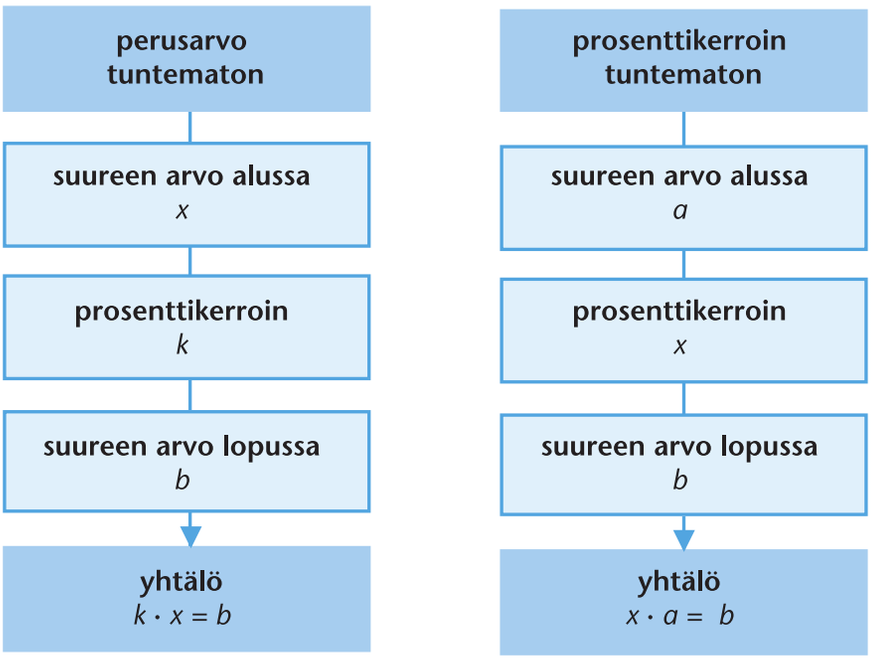
$$101{,}66\ldots\ \% - 100\ \% = 1{,}66\ldots\ \% \approx 1{,}7\ \%$$

VASTAUS

Kilohinta nousi 1,7 %.

Prosenttiyhtälöitä

Prosenttilaskentaan liittyvissä yhtälöissä tuntemattomana esiintyy usein joko perusarvo tai prosenttikerroin.



ESIMERKKI 5 Kirjan hinta nousee ensin 8 % ja sitten 5 %. Laske kirjan alkuperäinen hinta, kun se korotusten jälkeen on 10,60 €.

RATKAISU Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella x. Hinta nousee ensin 8 % eli tulee 1,08-kertaiseksi.

Tämän jälkeen hinta nousee vielä 5 % eli tulee 1,05-kertaiseksi.

Saadaan yhtälö

Peräkkäisissä muutoksissa jokaista muutosta kuvaa oma prosenttikerroin.

$$\begin{aligned} 1{,}05 \cdot 1{,}08x &= 10{,}60 \\ 1{,}134x &= 10{,}60 \quad \big| : 1{,}134 \\ x &= 9{,}3474\ldots \\ x &\approx 9{,}35 \end{aligned}$$

VASTAUS Kirjan alkuperäinen hinta oli 9,35 €.

Tehtäviä

Peruskäsitteitä

E1 1. Ville on ostamassa uutta autoa. Auton hinta on 12 500 €. Autokauppias antaa Villen vanhasta autosta 1500 €:n hyvityksen vaihdossa. Lisäksi Ville saa 800 € käteisalennusta. Kuinka monta prosenttia auton hinta yhteensä alenee?

2. Reetu ja Vilma olivat ostamassa matkapuhelimia. Reetu sai oman puhelimensa 99,90 €:n hintaan, kun puhelimen alkuperäinen hinta oli 115,50 €. Vilma sai puolestaan tingittyä 149,90 €:n hintaisen puhelimen hintaan 125,00 €. Kumpi sai puhelimeensa suuremman alennusprosentin?

3. Kaisan osakesalkun arvo ennen pörssiromahdusta oli 2500 €. Pörssiromahduksen jälkeen osakesalkku oli 1200 €:n arvoinen. Kuinka monta prosenttia salkun arvo laski?

E2 4. Perttu talletti pankkiin 200 €. Kuinka paljon talletus on kasvanut korkoa vuoden aikana, kun tilin korkoprosentti on 1,25?

5. Matkapuhelimia valmistavan yrityksen tuotekehitysosastolla työskentelee 138 henkilöä ja markkinointiosastolla 75 henkilöä.
   a) Kuinka monta prosenttia suurempi on tuotekehitysosaston henkilöstömäärä markkinointiosaston henkilöstömäärään verrattuna?
   b) Kuinka monta prosenttia pienempi on markkinointiosaston henkilöstömäärä verrattuna tuotekehitysosaston henkilöstömäärään?

E3 6. Netta sijoittaa 700 euroa rahastoon, jonka vuotuinen tuotto on 4,25 %.
   a) Laske sijoituksen arvo vuoden kuluttua.
   b) Eetu sijoitti saman summan rahastoon, jonka vuotuinen tuotto on 4,90 %. Kuinka monta prosenttia suuremman tuoton Eetu saa omasta rahastostaan?

7. Lähikauppojen hintavertailun mukaan kahvipaketin sai halvimmalla Veijon valinnasta. Pekan puodissa kahvipaketti maksoi 1,5 % enemmän kuin Veijon valinnassa. Marjatan marketissa kahvipaketista joutui maksamaan 3,5 % Veijon valintaa enemmän.
   a) Kuinka monta prosenttiyksikköä enemmän kahvipaketti maksoi Marjatan marketissa verrattuna Pekan puotiin?
   b) Kuinka monta prosenttia enemmän kahvipaketti maksoi Marjatan marketissa verrattuna Pekan puotiin?
   c) Kuinka monta prosenttia vähemmän kahvipaketti maksoi Pekan puodissa verrattuna Marjatan markettiin?

8. Reinon kenkä osti 100 saapasparia hintaan 15,00 €/pari. Kauppias päätti myydä saappaat 60 % kalliimmalla hinnalla. Syksyn poistomyynneissä Reinon kengässä myytiin kaikki saappaat 20 %:n alennuksella.
   a) Mikä oli saappaiden alennettu hinta?
   b) Kuinka monta prosenttia enemmän kauppias sai aina yhdestä saapasparista verrattuna alkuperäiseen ostohintaan?
   c) Kauppias ehti myymään 80 paria saappaita ennen poistomyyntiä. Loput saappaat kauppias myi poistomyynnin aikana. Kuinka paljon kauppiaalle jäi saappaiden myynnistä voittoa?

9. Koiramäen ja Kissavaaran välillä kulkevan paikallisjunan lipun hinta nousi ensimmäisenä vuonna 20 %, toisena vuonna 10 % ja kolmantena vuonna 5 %. Kuinka paljon lipun hinta nousi kaikkiaan?

10. Kaksi puhelinoperaattoria tarkasteli markkinaosuuksiensa kasvua vuosina 2008–2010. Kumpi operaattoreista on kasvattanut suhteellisesti enemmän markkinaosuuttaan?

Vuosi	Foni Oy	Puhe Oy
2008	+16 %	+10 %
2009	+6 %	+9 %
2010	+4 %	+7 %

E4 11. Karkki Oy nosti suklaakonvehtirasian hintaa 5,0 %. Samalla yritys kasvatti konvehtirasian kokoa 8,5 %. Kuinka paljon ja mihin suuntaan muuttui suklaakonvehtien kilohinta?

12. Torimyyjä nosti perunoiden kilohintaa 8 %. Samalla perunoiden kysyntä laski 5 %. Miten muuttuivat torimyyjän perunoista saamat myyntitulot?

Prosentti-yhtälöitä

13. Kaisa sai 3,5 % palkankorotuksen, jonka jälkeen hänen kuukausipalkkansa oli 2550 €. Mikä oli Kaisan kuukausipalkka ennen palkankorotusta?

14. Ismo sijoitti vakuutusrahastoon puolet lomarahastaan. Sijoituksen arvo kasvoi puolen vuoden aikana 2,5 %, minkä jälkeen sen arvo oli 520 €. Kuinka suuri oli Ismon lomaraha?

15. Leena myi asuntonsa välitysliikkeen avulla. Välityspalkkio oli 3,80 % asunnon velattomasta myyntihinnasta. Mikä oli velaton myyntihinta, kun välityspalkkion maksamisen jälkeen Leena sai 119 288 €?

16. Reetan palkkatuloista jää kuukaudessa käyttörahaa pakollisten menojen jälkeen 31,5 % eli 650 €.
    a) Kuinka suuri on Reetan kuukausipalkka?
    b) Kuinka paljon Reetalle jää kuukausipalkastaan käteen verojen jälkeen, kun Reetan veroprosentti on 29,5 %?

E5 17. Kesän alennusmyynneissä sandaalien hintaa alennettiin ensin 40 % ja sitten vielä 70 %. Alennusten jälkeen sandaalit maksoivat 6,55 €. Mikä oli sandaalien alentamaton hinta?

18. Ammattijärjestö ja työnantaja sopivat kaksivuotisen työehtosopimuksen, jonka mukaan palkkoja nostetaan molempina vuosina yhtä monta prosenttia. Kaikkiaan korotuksen suuruus oli 5,5 %. Kuinka monta prosenttia palkat nousivat vuosittain?

19. Yrityksen osakkeen hinta kohosi peräkkäisinä päivinä yhtä monta prosenttia. Kuinka monta prosenttia päivittäinen nousu oli, kun osakkeen hinta tarkastelun alussa oli 10,50 € ja viiden päivän kuluttua 17,80 €?

Sekalaisia tehtäviä

20. Erään yrityksen liikevaihdot vuosina 2007–2010 olivat seuraavat:

Vuosi	Liikevaihto (10 000 €)
2007	26,0
2008	25,4
2009	24,1
2010	24,9

Kuinka monta prosenttia yrityksen liikevaihto oli
a) suurempi vuonna 2007 kuin vuonna 2009
b) pienempi vuonna 2010 kuin vuonna 2008?

21. Tiina talletti tilille 120 €. Kun talletus oli kasvanut korkoa vuoden, tilillä oli rahaa 123 €. Kuinka suuri oli tilin korkoprosentti?

22. Malla talletti säästöpossuun tammikuussa 10 €. Hän päätti tallettaa vuoden ajan joka kuukausi aina 20 % edellistä kuukautta enemmän. Kuinka paljon Malla talletti säästöpossuun
a) helmikuussa b) joulukuussa?

23. Kirjan hinta nousi syksyllä 5,0 %. Joulun alennusmyynteihin kirjan hintaa laskettiin 8,0 %. Kuinka monta prosenttia kirjan hinta muuttui kaiken kaikkiaan?

24. Kuntosalin pääsymaksun hintaa korotettiin 15 %. Viikoittainen kävijämäärä putosi korotuksen vuoksi 10 %. Miten kuntosalin pääsymaksutulot muuttuivat?

25. Pankki maksaa Onnin tilille 1,8 % korkoa. Onni tallettaa vuoden alussa tililleen rahaa. Kuinka paljon Onni talletti tililleen, jos
a) vuoden kuluttua tilillä on 96,51 €
b) kolmen vuoden kuluttua tilillä on 84,40 €?

2.2 Ansiotulojen verotus

Yksittäisen kansalaisen on maksettava palkkatuloista ja muusta varallisuudesta veroa. Veroa perivät valtio, kunta ja seurakunta. Verorahoja käytetään mm. erilaisten palveluiden ylläpitämiseen.

Ansiotuloista maksettavat verot

Ansiotuloista maksetaan **valtion tuloveroa** ja **kunnallisveroa**. Evankelisluterilaiseen tai ortodoksiseen seurakuntaan kuuluvat maksavat myös **kirkollisveroa**. Lisäksi ansiotuloista peritään muita veronkaltaisia maksuja, kuten eläke- ja työttömyysvakuutusmaksu.

Yksityishenkilöltä verot peritään yleensä ennakkoverona **ennakonpidätysprosentin** mukaan. Ennakonpidätysprosentti näkyy jokaisen verokortista. Työnantaja suorittaa ennakonpidätyksen verokortin mukaisesti ja tilittää veron veroviranomaisille.

Huomio Palkansaaja! Valitse vaihtoehto A tai B ja toimita alkuperäinen verokortti päätoimen työnantajalle.
Jos olet saanut muutosverokortin palkkaa varten vuodelle 2010, tämä verokortti on aiheeton.

Obs Löntagare! Välj alternativet A eller B och lämna skattekortet i original till den huvudsakliga arbetsgivaren.
Om du har fått ett ändringsskattekort för lön för år 2010, är detta skattekort onödigt.

Veronmaksaja Ville

VEROKORTTI PÄÄTOIMEN PALKKATULOA VARTEN 2010
SKATTEKORT FÖR LÖN AV HUVUDSYSSLA 2010

Verotuskunta Beskattningskommun
091 HELSINKI
Henkilötunnus Personbeteckning

Ennakonpidätysprosentit 1.2.2010 alkaen Förskottsinnehållningsprocent fr.o.m. 1.2.2010			
Palkkaa varten För lön		**Merityötuloa varten För sjöarbetsinkomst**	
Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent	Perusprosentti Grundprocent	Lisäprosentti Tilläggsprocent
32,5	47,0		

Työnantaja toimittaa ennakonpidätyksen perusprosentin suuruisena palkansaajan valitseman kohdan A tai B tulorajaan asti ja ylimenevästä osasta lisäprosentin mukaan. Perusprosentti ja lisäprosentti ovat samat huolimatta siitä, kumman vaihtoehdon palkansaaja valitsee.
Arbetsgivaren verkställer förskottsinnehållningen enligt grundprocenten upp till inkomstgränsen i punkt A eller B enligt löntagarens val och på den överstigande delen enligt tilläggsprocenten. Procentenheterna är samma oberoende av vilketdera alternativet som den skattskyldige valt.

VALITSE JA RASTITA A TAI B. VALINTAA EI VOI VAIHTAA KESKEN VUODEN.
VÄLJ OCH KRYSSA FÖR A ELLER B. VALET KAN INTE BYTAS MITT UNDER ÅRET.

A ☐ Valitsen ennakonpidätyksen palkkakauden tulorajan mukaan. Jag väljer förskottsinnehållningen enligt löneperiodens inkomstgräns.	A ☐ Työnantajan käyttämä vaihtoehto Av arbetsgivaren använt alternativ

Palkkakauden tuloraja Löneperiodens inkomstgräns					
kuukaudessa per månad	kahdessa viikossa per två veckor	viikossa per vecka	päivässä per dag	Merityötulo päivässä Sjöarbetsinkomst per dag	Laskennallinen tuloraja ATK-järjestelmiä varten Kalkylerad inkomstgräns för datasystem
3 758,33	1 734,62	867,31	123,90		45 100,00

ESIMERKKI 1 Kuinka paljon Ville Veronmaksajan palkkatuloista pidätettiin veroennakkoa, kun Villen kuukauden palkkatulot olivat
a) 3500 € b) 4500 €?

Ville Veronmaksajan verokortti on edellisellä sivulla.

RATKAISU

a) Palkkakauden tuloraja kuukaudessa on 3758,33 €. Koska palkkatulot kuukaudessa ovat tulorajaa pienemmät, lasketaan veroennakon määrä suoraan perusprosentin mukaan.

Veroennakkoa peritään $0{,}325 \cdot 3500\ € = 1137{,}50\ €$.

b) Kuukauden palkkatulot ylittävät palkkakauden tulorajan 3758,33 €. Tulorajaan asti ennakkoveroa peritään perusprosentin verran. Veroennakko tulorajaan asti:

$$0{,}325 \cdot 3758{,}33\ € = 1221{,}457\ 25\ €$$

Tulorajan ylittävältä osalta ennakkoveroa peritään lisäprosentin mukaan. Veroennakko tulorajan ylittävältä osalta:

$$\begin{aligned} &0{,}47 \cdot (4500{,}00\ € - 3758{,}33\ €) \\ &= 0{,}47 \cdot 741{,}67\ € \\ &= 348{,}5849\ € \end{aligned}$$

Veroennakkoa peritään siis yhteensä

$$1221{,}457\ 25\ € + 348{,}5849\ € = 1570{,}042\ 15\ € \approx 1570{,}04\ €$$

VASTAUS a) 1137,50 € b) 1570,04 €

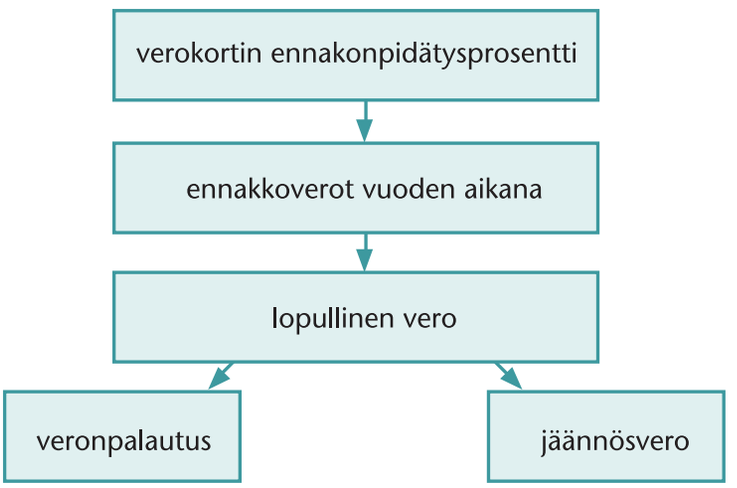
Jokaisen verovuoden lopussa suoritetaan **lopullinen verotus** todellisista vuosituloista. Vuoden ansiotuloista vähennetään ensin sallitut **vähennykset**, kuten matkakulut, minkä jälkeen jäljelle jää **verotettava ansiotulo**.

verotettava ansiotulo = ansiotulot – vähennykset

Koska eri verotuksissa vähennyksiä sovelletaan eri tavoin, verotettava tulo voi olla valtionverotuksessa eri suuri kuin kunnallisverotuksessa. Tässä kirjassa ei käsitellä vähennyksiä tarkemmin vaan tehtävissä annetaan valmiiksi eri verotuksissa käytettävä verotettava tulo.

Verotettavan tulon perusteella määräytyy koko vuonna maksettujen verojen määrä eli lopullinen vero. Jos lopullinen vero on pienempi kuin vuoden aikana maksettu ennakkovero, valtio maksaa **veronpalautusta**. Valtio maksaa veronpalautukselle korkoa. Vuonna 2010 palautuskorko oli 0,5 %.

Jos taas lopullinen vero on suurempi kuin maksettu ennakkovero, joudutaan maksamaan lisää veroja eli **jäännösveroa**. Veronmaksaja maksaa jäännösveron korkoineen. Tehtävien yksinkertaistamiseksi kirjassa on jätetty huomioimatta sekä valtion että veronmaksajan maksettavaksi tuleva korko.



Valtion tuloveron lopullisen määrän laskemiseen käytetään vuosittain julkaistavaa **valtion tuloveroasteikkoa**. Tuloveroasteikko on progressiivinen, eli verojen suhteellinen osuus ansiotuloista kasvaa tulojen noustessa. Valtion tuloveroasteikko määritellään joka vuosi erikseen budjettineuvotteluiden yhteydessä.

Valtion tuloveroasteikko 2010

Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
15 200–22 600	8	6,5
22 600–36 800	489	17,5
36 800–66 400	2974	21,5
66 400–	9338	30,0

ESIMERKKI 2 Mikaelan verotettavat ansiotulot olivat 25 500 € vuonna 2010. Kuinka paljon hänen on maksettava valtion tuloveroa?

RATKAISU Verotettava ansiotulo on välillä 22 600 € – 36 800 €.

Valtion tuloveroasteikko 2010

Verotettava ansiotulo (€)	Vero alarajan kohdalla (€)	Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)
15 200–22 600	8	6,5
22 600–36 800	489	17,5
36 800–66 400	2974	21,5
66 400–	9338	30,0

Vero alarajan kohdalla on siis 489 €.

Alarajan ylittävä osa on 25 500 € – 22 600 € = 2900 €.

Tästä maksetaan veroa 17,5 % eli 0,175 · 2 900 € = 507,50 €.

Yhteensä Mikaela maksaa ansiotuloistaan valtion tuloveroa
489 € + 507,50 € = 996,50 €.

VASTAUS Mikaelan on maksettava valtion tuloveroa 996,50 €.

ESIMERKKI 3 Paavo maksoi valtion tuloveroa 5230 €. Laske Paavon verotettavat ansiotulot valtionverotuksessa.

RATKAISU Koska Paavon maksamat verot ovat enemmän kuin 2974 € mutta vähemmän kuin 9338 €, hän kuuluu tuloluokkaan 36 800–66 400.

Merkitään Paavon verotettavia tuloja kirjaimella x.

- Vero alarajan kohdalla on 2974 €.
- Vero ylimenevältä osalta on $0{,}215(x - 36\,800)$.

Saadaan yhtälö

$$2974 + 0{,}215(x - 36\,800) = 5230$$
$$2974 + 0{,}215x - 7912 = 5230$$
$$0{,}215x = 10\,168 \qquad | : 0{,}215$$
$$x = 47\,293{,}02\ldots$$

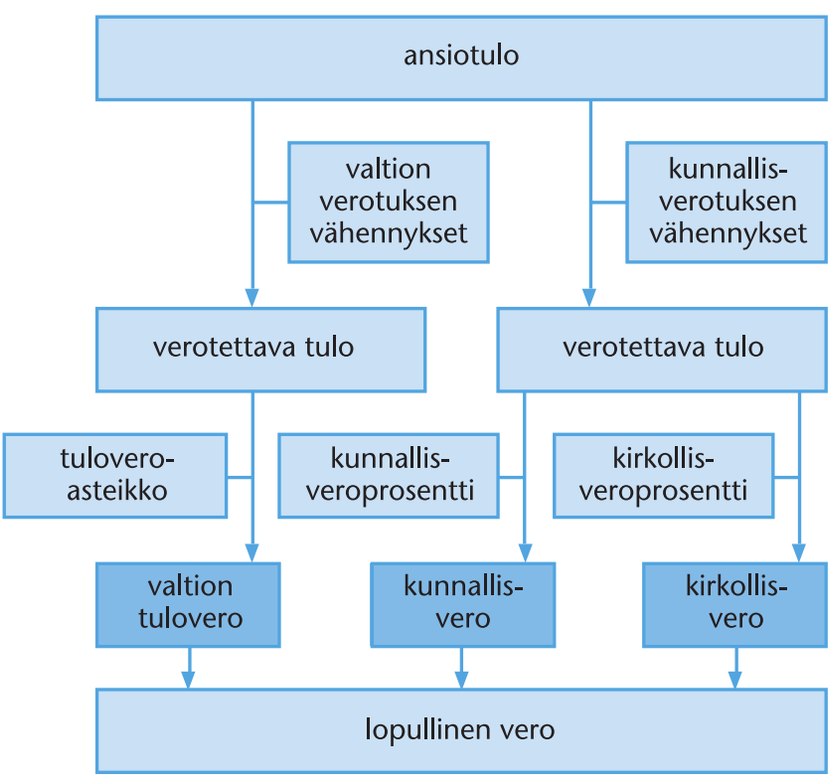
VASTAUS Verotettavat ansiotulot ovat 47 293 €.

Kunnallisvero on kunnalle maksettava tulovero. Kunnallisvero määräytyy asuinkunnan mukaan. Nykyään jokainen asuinkunta määrittelee oman kunnallisveroprosenttinsa vuosittain. Kunnallisvero ei ole progressiivinen vero, vaan kaikki samassa kunnassa asuvat maksavat veroa saman kunnallisveroprosentin mukaan.

Kirkollisvero on seurakunnalle maksettava vero, jonka kirkkovaltuusto vahvistaa vuosittain. Kirkollisveroa maksavat evankelisluterilaisten ja ortodoksisten seurakuntien jäsenet. Kirkollisvero peritään vuosittain seurakunnan tuloveroprosentin mukaan. Kirkollisvero ei myöskään ole progressiivinen vero, vaan se määräytyy asuinkunnan mukaan.

Ennakonpidätysprosentissa on huomioitu kunnallisvero, kirkollisvero ja valtion tulovero. Kaikkien verojen osalta työnantaja ennakonpidättää verot ja maksaa verottajalle.

Kunta	Kunnallisvero-prosentti 2010	Evankelisluterilaisen seurakunnan tuloveroprosentti 2010
Helsinki	17,50	1,00
Jyväskylä	19,00	1,35
Kajaani	20,00	1,50
Mikkeli	19,50	1,40
Oulu	19,00	1,25
Rovaniemi	20,00	1,25
Seinäjoki	19,25	1,65
Tampere	19,00	1,25
Turku	18,75	1,00
Vaasa	19,50	1,25



ESIMERKKI 4

Vuonna 2010 Seinäjoella asuvan Reetan verotettava ansiotulo oli sekä valtionverotuksessa että kunnallisverotuksessa 34 560 €. Reetta kuuluu evankelisluterilaiseen kirkkoon. Lisäksi hänen palkastaan peritään 4,50 % eläkemaksua ja 0,40 % työttömyysvakuutusmaksua. Laske Reetan verojen ja veronkaltaisten maksujen suuruus.

RATKAISU

1. Lasketaan ensin **valtion tuloveron määrä**.

Verotettava tulo kuuluu luokkaan 22 600 € – 36 800 €.

Vero alarajan kohdalla on 489 €.

Vero alarajan ylittävästä osasta on 17,5 % eli

$$\begin{aligned} &0{,}175 \cdot (34\,560\ € - 22\,600\ €) \\ &= 0{,}175 \cdot 11\,960\ € \\ &= 2093\ € \end{aligned}$$

Valtion tuloveron suuruus: 489 € + 2093 € = 2582 €.

2. Valtion tuloveron lisäksi palkasta **peritään seuraavia veroja ja maksuja**:

- kunnallisveroprosentti 19,25 %
- kirkollisveroprosentti 1,65 %
- eläkemaksu 4,50 %
- työttömyysvakuutusmaksu 0,40 %

Koska muut ansiotuloista menevät verot ja maksut eivät ole progressiivisia, ne voidaan yhdistää.

$$19{,}25\ \% + 1{,}65\ \% + 4{,}50\ \% + 0{,}40\ \% = 25{,}80\ \%$$

Valtion tuloveron lisäksi maksetaan muita veroja ja maksuja

$$0{,}2580 \cdot 34\,560\ € = 8916{,}48\ €$$

Verojen ja veronkaltaisten maksujen kokonaismäärä on

$$2582\ € + 8916{,}48\ € = 11\,498{,}48\ €$$

VASTAUS

Maksujen suuruus on 11 498 €.

Tehtäviä

Käytä tehtävissä sivujen 21 ja 23 verotaulukoita.

Ansiotuloista maksettavat verot

E1 26. Taavin verokortissa palkkatulojen perusprosentti oli 28,5 ja lisäprosentti 46,5. Palkkakuukauden tuloraja oli 2850,50 €.
a) Kuinka paljon Taavin palkkatuloista pidätettiin veroennakkoa, kun hänen kuukausipalkkansa oli 2500 €?
b) Kuinka paljon Taaville jäi palkasta käteen veronpidätyksen jälkeen, kun Taavin kuukausipalkka oli 3000 €?

27. Palkansaajan ennakonpidätysprosentti oli 42. Kuinka paljon häneltä oli pidätetty veroennakkoa, kun hän sai pidätyksen jälkeen 847,30 euroa? [mukailtu K1994, 3]

E2 28. Kuinka paljon on vuodessa maksettava valtion tuloveroa
a) 32 000 euron b) 60 000 euron ansiotuloista?

29. Kuinka paljon on vuodessa maksettava valtion tuloveroa
a) 15 500 euron b) 36 800 euron ansiotuloista?

E3 30. Sonja maksoi ansiotuloistaan valtion tuloveroa 1760 €. Kuinka suuret olivat Sonjan verotettavat ansiotulot valtion verotuksessa?

31. Anteron verotettavat ansiotulot sekä valtion verotuksessa että kunnallisverotuksessa olivat 18 000 €. Kuinka paljon Antero maksaa veroja, jos hän asuu a) Mikkelissä b) Turussa?

32. Eerika asuu Rovaniemellä. Hänen ansiotulonsa kuukaudessa ovat 2150 €. Helsingissä asuvan Minjan kuukausitulot ovat 2500 €. Kumpi tytöistä maksoi vuonna 2010 kuukaudessa enemmän kunnallisveroa? Kuinka paljon enemmän?

E4 33. Kuinka paljon seuraavien henkilöiden tulisi maksaa ansiotuloistaan veroa ja muita veron kaltaisia maksuja vuoden 2010 verotuksen mukaan? Verojen lisäksi palkoista peritään eläkemaksua 4,50 % ja työttömyysvakuutusmaksua 0,40 %.

a) Tampereella asuva Elli, joka ei kuulu kirkkoon ja jonka ansiotulot vuodessa ovat 38 200 €.

b) Urho, joka kuuluu evankelisluterilaiseen kirkkoon ja asuu Oulussa ja jonka vuosittaiset ansiotulot ovat 41 380 €.

34. Konsta asui vuonna 2010 Tampereella. Hänen ansiotulonsa olivat 33 750 € vuodessa. Konsta kuuluu evankelisluterilaiseen kirkkoon. Laske Konstan verojen ja veronkaltaisten maksujen suuruus, kun verojen lisäksi palkasta peritään eläkemaksua 4,50 % ja työttömyysvakuutusmaksua 0,40 %.

35. Ohessa on valtion tuloveroasteikko verovuodelta 2000.

a) Kuinka paljon valtion tuloveroa vuonna 2000 maksoi henkilö, jonka verotettava vuositulo oli 162 520 mk?

b) Kuinka suuri olisi henkilön verotettava vuositulo ollut, jos hänelle valtion tuloveron pidätyksen jälkeen olisi jäänyt 162 520 mk? [S2002, 7]

Verotettava tulo (mk)	Vero alarajalla (mk)	Vero alarajan ylittävästä tulosta (%)
47 600–63 600	50	5,0
63 600–81 000	850	15,0
181 000–113 000	3460	19,0
113 000–178 000	9540	25,0
178 000–315 000	25 790	31,0
315 000–	68 260	37,5

36. Tarkastele valtion tuloveron ja kunnallisveron määrää (esimerkiksi kotikunnassasi) 20 000 € – 100 000 € vuosituloilla. Piirrä verojen määristä viivadiagrammit samaan koordinaatistoon. Milloin tuloveron määrä ylittää kunnallisveron määrän?

Sekalaisia tehtäviä

37. Ellan verokortissa palkkatulojen perusprosentti oli 26,5 ja lisäprosentti 42,0. Palkkakuukauden tuloraja oli 2150 €. Kuinka paljon Ellan palkkatuloista pidätettiin veroennakkoa, kun hänen kuukausipalkkansa oli a) 1980 € b) 2470 €?

38. Vuonna 2010 Tiina ansaitsi vuodessa 23 647,20 €. Verojen lisäksi palkoista peritään eläkemaksua 4,50 % ja työttömyysvakuutusmaksua 0,40 %. Tiina asuu Vaasassa ja kuuluu evankelisluterilaiseen seurakuntaan. Kuinka paljon Tiina maksaa vuoden aikana veroja ja veronkaltaisia maksuja?

39. Sanna maksoi valtion tuloveroa 6250 €. Mitkä olivat hänen verotettavat tulonsa valtion verotuksessa?

40. Jyväskylässä asuvan, kirkkoon kuulumattoman henkilön vuosituloiksi vuonna 2010 arvioitiin 25 000 €. Kuinka monta prosenttia tuloista menee veroihin?

41. Etsi Verohallinnon internet-sivuilta (www.vero.fi) oman kuntasi kunnallisveroprosentti ja kirkollisveroprosentti. Etsi samalla myös tämänhetkinen valtion tuloverotaulukko. Kuinka paljon näiden perusteella joutuu 28 000 € palkkatuloista maksamaan
a) kunnallisveroa
b) kirkollisveroa
c) valtion tuloveroa?

2.3 Muut verot

Pääomatulojen verotus

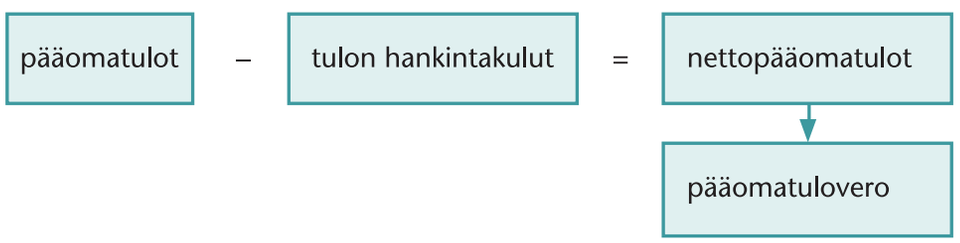
Ansiotulojen lisäksi veroja maksetaan **pääomatuloista**. Pääomatuloina pidetään yleensä tuloja, jotka ovat kertyneet erilaisten rahallisten omaisuuksien kautta. Pääomatuloja ovat esimerkiksi

- korkotulo
- osakekauppojen myyntivoitto
- osinkotulo
- vuokratulo
- omaisuuden luovutuksesta saatu voitto (esimerkiksi asunnon myynti).

Pääomatuloista peritään veroa kiinteän veroprosentin mukaan. Ennen veron laskemista vähennetään tulon hankkimisesta aiheutuneet kulut.

- Asunnon tai osakkeiden myynnin kohdalla veroa maksetaan vain osto- ja myyntihinnan välisestä erotuksesta.
- Vuokratulosta voidaan vähentää yhtiövastike ja asunnon kunnostamisesta aiheutuneet kulut.
- Jos varallisuuden hankintaan on otettu lainaa, korkokuluja voidaan yleensä käyttää vähennyksinä.

Näin saatujen **nettopääomatulojen** veroprosentti on ollut vuodesta 2005 lähtien 28 %.



Pääomatuloista ei makseteta ennakkoveroa samalla tavalla kuin ansiotuloista, vaan pääomatulojen verot maksetaan normaalisti jälkikäteen jäännösverona.

ESIMERKKI 1

Heta vuokraa omistamansa huoneiston 600 euron kuukausivuokralla. Huoneistossa jouduttiin tekemään kylpyhuoneremontti, jonka hinnaksi tuli 2500 €. Kuinka paljon Heta maksaa vuokratuloista veroa, kun hänen maksamansa yhtiövastike vuokratusta huoneistosta on 120 € kuukaudessa?

RATKAISU

Hetan saamat pääomatulot asunnon vuokraamisesta vuodessa ovat

$$12 \cdot 600\ € = 7200\ €$$

Jos Hetalla olisi ollut asuntolainaa vuokrattavasta asunnosta, lainan korot olisi saanut vähentää verotuksessa.

Vuokratuloista saa vähentää ennen veron laskemista tulon hankkimisesta aiheutuneet kulut. Näitä ovat tässä tapauksessa sekä maksetut yhtiövastikkeet että asunnon korjauskulut.

Vähennysten suuruus vuodessa on siis

$$\underbrace{12 \cdot 120\ €}_{\text{yhtiövastike}} + \underbrace{2500\ €}_{\text{korjauskulut}} = \underbrace{3940\ €}_{\text{vähennykset}}$$

Nettopääomatulot vuodessa ovat

$$7200\ € - 3940\ € = 3260\ €$$

Heta maksaa vuokratuloista veroa

$$0{,}28 \cdot 3260\ € = 912{,}80\ €$$

VASTAUS

Heta maksaa vuokratuloista veroa 912,80 €.

Perintö- ja lahjavero

Jossain elämän vaiheessa lähes jokainen saa joko perintönä tai lahjoituksena omaisuutta. Kummallakin tavalla saadusta omaisuudesta tulee maksaa veroa. Kaikki kolmen vuoden aikana samalta antajalta saadut lahjat lasketaan yhteen ja vero määrätään yhteenlasketun arvon perusteella.

- Jos perittävän omaisuuden arvo on alle 20 000 €, sen voi ottaa vastaan verottomana (2010).
- Jos lahjana saatavan omaisuuden arvo on alle 4000 €, lahjoituksesta ei tarvitse maksaa veroa (2010).

Perintö- ja lahjaveron suuruus määräytyy perityn tai lahjoitetun omaisuuden määrän ja sukulaisuussuhteen perusteella. Sukulaisuussuhteen mukaan perinnön ja lahjan saajat jaetaan kahteen veroluokkaan.

1. Ensimmäiseen veroluokkaan kuuluvat esimerkiksi aviopuoliso, lapset, vanhemmat ja isovanhemmat.

Perintövero (2010)			Lahjavero (2010)		
verotettavan osuuden arvo (€)	vero alarajan kohdalla (€)	veroprosentti ylimenevästä osasta (%)	verotettavan osuuden arvo (€)	vero alarajan kohdalla (€)	veroprosentti ylimenevästä osasta (%)
20 000–40 000	100	7	4000–17 000	100	7
40 000–60 000	1500	10	17 000–50 000	1010	10
60 000–	3500	13	50 000–	4310	13

2. Toiseen veroluokkaan kuuluvat esimerkiksi sisarukset ja heidän lapsensa, muut sukulaiset sekä vieraat.

Perintövero (2010)			Lahjavero (2010)		
verotettavan osuuden arvo (€)	vero alarajan kohdalla (€)	veroprosentti ylimenevästä osasta (%)	verotettavan osuuden arvo (€)	vero alarajan kohdalla (€)	veroprosentti ylimenevästä osasta (%)
20 000–40 000	100	20	4000–17 000	100	20
40 000–60 000	4100	26	17 000–50 000	2700	26
60 000–	9300	32	50 000–	11 280	32

Perittävän tai lahjoituksena saadun omaisuuden arvo määritetään verotusta varten niin, että arvo pyöristetään aina alaspäin täysiin satoihin euroihin. Eli jos esimerkiksi perittävän omaisuuden arvo on 13 278 €, veroa laskettaessa omaisuuden verotusarvo on 13 200 €.

ESIMERKKI 2

Karla saa 10 000 €:n rahalahjoituksen. Kuinka paljon hän maksaa lahjasta veroja, kun Karla saa lahjan
a) isoisältään b) veljeltään
c) puoliksi isältään, puoliksi äidiltään?

RATKAISU

a) Isoisä kuuluu 1. veroluokkaan.

Karlan saama 10 000 €:n lahja kuuluu verotaulukon ensimmäiseen luokkaan. Veron vakioerä osuuden alarajalla on 100 €.

Alarajan ylittävä osuus on 10 000 € – 4000 € = 6000 €.

Tästä maksetaan veroa 7 % eli 0,07 · 6000 € = 420 €.

Koko lahjasta maksetaan siis veroa 100 € + 420 € = 520 €.

b) Veli kuuluu 2. veroluokkaan.

Veron vakioerä osuuden alarajalla on 100 €.

Alarajan ylittävä osuus on 6000 €, josta maksetaan veroa 20 % eli 0,20 · 6000 € = 1200 €.

Koko lahjasta maksetaan siis veroa 100 € + 1200 € = 1300 €.

c) Vanhemmat kuuluvat 1. veroluokkaan. Molemmat vanhemmat lahjoittavat siis 5000 €, joten lasketaan ensin verojen suuruus tästä summasta.

Veron vakioerä osuuden alarajalla on 100 €.

Alarajan ylittävä osuus on 5000 € – 4000 € = 1000 €.

Tästä maksetaan veroa 7 % eli 0,07 · 1000 € = 70 €.

5000 euron osuudesta maksetaan siis veroa
100 € + 70 € = 170 €.

Tämä summa maksetaan kummankin vanhemman lahjoittamasta summasta, joten koko lahjasta maksetaan veroa
170 € + 170 € = 340 €.

VASTAUS

a) 520 € b) 1300 € c) 340 €

ESIMERKKI 3 Leevi saa tädiltään perinnön, josta hän maksaa veroja 7740 €. Kuinka suuren perinnön Leevi saa?

RATKAISU Täti kuuluu 2. veroluokkaan. Merkitään perinnön suuruutta kirjaimella x.

Koska vero on suurempi kuin 4100 € ja pienempi kuin 9300 €, perinnön suuruus kuuluu välille 40 000–60 000.

Vero alarajan kohdalla on 4100 €.

Vero ylimenevästä osasta on $0{,}26(x - 40\,000)$.

Saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 4100 + 0{,}26(x - 40\,000) &= 7740 \\ 4100 + 0{,}26x - 10\,400 &= 7740 \\ 0{,}26x &= 14\,040 \qquad \mid : 0{,}26 \\ x &= 54\,000 \end{aligned}$$

VASTAUS Perinnön suuruus on 54 000 €.

Arvonlisävero

Arvonlisävero, alv, on kulutusvero, joka kohdistuu tavaroiden ja palveluiden kuluttamiseen. Arvonlisävero-nimitys tulee siitä, että eri vaiheiden myyjät (esimerkiksi maanviljelijä, tukkukauppias, jälleenmyyjä) tilittävät valtiolle veroa siitä määrästä, jolla tuotteen arvo on kussakin vaiheessa lisääntynyt. Arvonlisäveroa kuluttaja maksaa hankkiessaan tuotteen tai palvelun. Monet tuotteet kulkevat useiden välivaiheiden kautta ennen kuin päättyvät kaupan hyllylle kuluttajien saataville.

Arvonlisävero lasketaan aina tuotteen tai palvelun verottomasta hinnasta.

tuotteen veroton hinta	+	arvonlisävero	=	tuotteen verollinen hinta

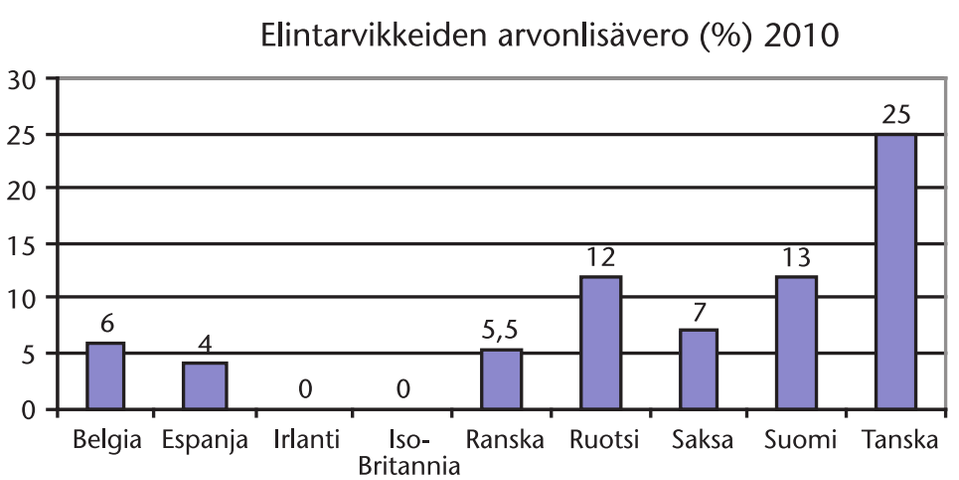
Joillekin tuotteille ja palveluille on asetettu myös muita veroja, kuten polttoaine- tai autovero. Nämä verot sisältyvät arvonlisäveroa laskettaessa tuotteen verottomaan hintaan.

Suomessa yleinen arvonlisävero on 23 % tuotteen tai palvelun verottomasta hinnasta. Joidenkin tuotteiden ja palveluiden osalta vero kuitenkin poikkeaa edellä mainitusta. Seuraavassa taulukossa on esitetty käytössä olevat arvonlisäverot Suomessa (1.7.2010).

Tuote tai palvelu	Arvonlisävero (%)
yleinen arvonlisävero	23
elintarvikkeet ja ravintolapalvelut	13
lääkkeet, kirjat, elokuvaliput, majoituspalvelut, kulttuuri- ja viihdetilaisuudet ja henkilökuljetukset	9
lakisääteinen koulutus, sairaanhoitopalvelut, lehtien tilausmaksut jne.	0

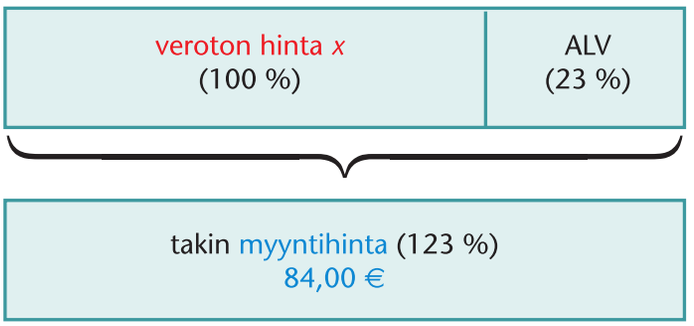
Kuluttajille myytävissä tuotteissa pitää Suomessa olla tuotteen kokonaishinta (verollinen hinta). Monissa maissa, esimerkiksi Yhdysvalloissa, kauppojen ei tarvitse esittää kuin tuotteiden veroton hinta. Näin ollen tuotteen verollinen hinta selviää vasta kassalla maksettaessa. Yritysten välisessä kaupankäynnissä hinnat esitetään tavallisesti verottomina ilman arvonlisäveroa.

Arvonlisäveroprosentti vaihtelee maasta riippuen. Esimerkiksi Euroopan unionin jäsenmaissa yleinen arvonlisävero on 15–25 % ja elintarvikkeiden arvonlisävero on 0–25 %.



ESIMERKKI 4 Ulkotakin myyntihinta liikkeessä on 84 €. Kuinka paljon kuluttaja maksaa arvonlisäveroa ostaessaan takin, kun vaatteiden arvonlisävero on 23 %?

RATKAISU Merkitään verotonta hintaa kirjaimella x.



Saadaan yhtälö

$$1{,}23 \cdot x = 84 \quad | : 1{,}23$$
$$x = 68{,}292\ldots$$
$$x \approx 68{,}29\ (€)$$

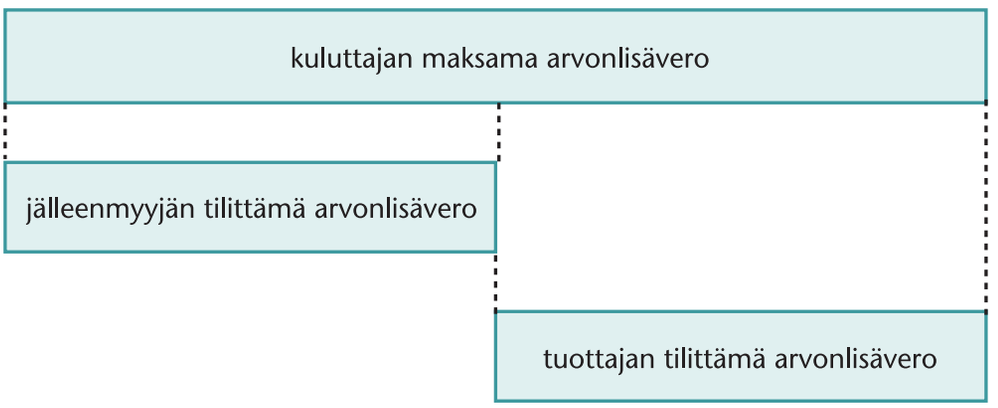
Takin veroton hinta on siis 68,29 €.

Arvonlisäveron osuus saadaan verollisen hinnan ja verottoman hinnan erotuksena.

$$84\ € - 68{,}29\ € = 15{,}71\ €$$

VASTAUS Arvonlisäveron osuus takin hinnasta on 15,71 €.

Monet tuotteet kulkevat useiden välivaiheiden kautta ennen kuin päätyvät kaupan hyllylle kuluttajan saataville. Eri vaiheiden myyjät tilittävät valtiolle yhteensä saman määrän arvonlisäveroa, jonka kuluttaja maksaa ostaessaan tuotteen.



ESIMERKKI 5

Leipomo Pulla Oy valmistaa leivonnaisia, jotka se myy edelleen tukkukauppiaalle. Viime kuussa yritys osti 8000 eurolla (sisältää arvonlisäveron) leivontatarvikkeita ja myi tuotteitaan tukkukauppiaalle 14 000 euron (sis. alv:n) arvosta. Kuinka paljon leipomo Pulla Oy:n täytyy tilittää kuukaudessa arvonlisäveroa valtiolle?

RATKAISU

Kyse on elintarvikkeista, joten arvonlisävero on 13 %. Lasketaan, kuinka paljon tuotteiden myynnistä ja raaka-aineiden hankinnasta on arvonlisäveron osuus.

Koska arvonlisävero lasketaan verottomasta hinnasta, täytyy ensin selvittää, mitkä ovat tulojen ja menojen verottomat arvot.

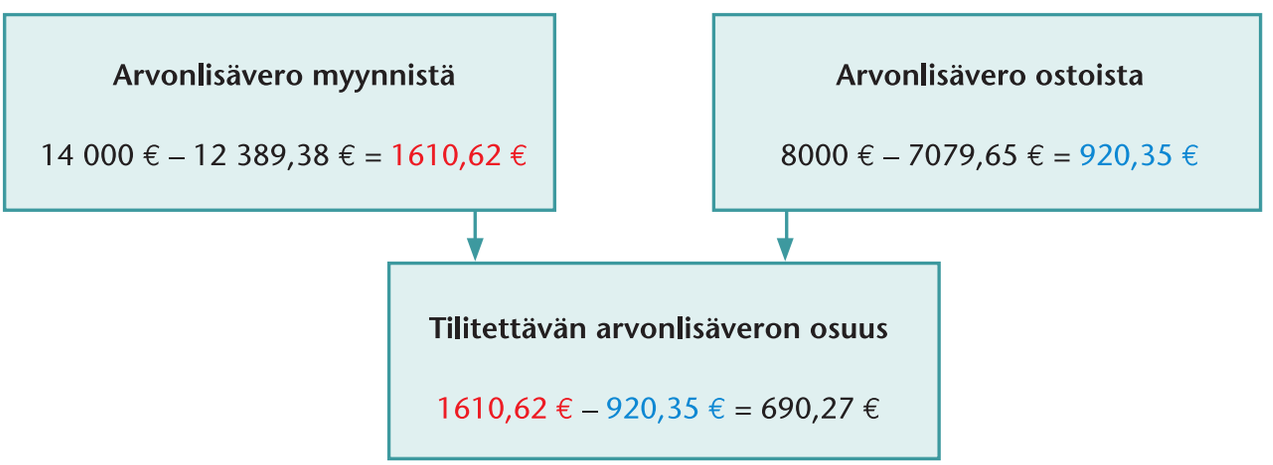
Merkitään myyntitulojen verotonta arvoa kirjaimella x.

$$x \cdot 1{,}13 = 14000\ € \quad | : 1{,}13$$
$$x = 12389{,}380\ldots\ € \approx 12389{,}38\ €$$

Merkitään leivontatarvikkeiden verotonta arvoa kirjaimella y.

$$y \cdot 1{,}13 = 8000\ € \quad | : 1{,}13$$
$$y = 7079{,}646\ldots\ €$$
$$y \approx 7079{,}65\ €$$

Leipomo Pulla tilittää valtiolle tuotteidensa myynnistä saaman arvonlisäveron ja leivontatarvikkeiden oston yhteydessä maksamansa arvonlisäveron välisen erotuksen.



VASTAUS

Yrityksen tulee tilittää valtiolle 690,27 €.

Tehtäviä

Pääomatulojen veroprosentti on 28 %, ellei toisin mainita.

Pääomatulojen verotus, perintö- ja lahjavero

42. Ilmari osti kaupungin keskustasta yksiön 35 000 €:n hintaan. Vuoden kuluttua Ilmari kuitenkin päätti myydä yksiönsä, kun naapuri tarjosi siitä hänelle 40 000 €. Kuinka paljon Ilmari joutui maksamaan veroa yksiönsä myymisestä?

43. Selvitä Verohallinnon internet-sivuilta (www.vero.fi), millaisissa tilanteissa myytävästä asunnosta ei tarvitse maksaa luovutusvoittoveroa.

44. Olivia osti 10 kappaletta paperiyhtiön osakkeita 25,00 euron kappalehintaan. Paperiyhtiön pörssikurssi nousi oston jälkeen 15 %, jolloin Olivia päätti myydä osakkeet.
    a) Kuinka paljon Olivia joutuu maksamaan osakkeiden myynnin yhteydessä veroa?
    b) Kuinka paljon Olivia voittaa osakekaupoilla?

E1 45. Olli on vuokrannut kesämökkinsä koko vuodeksi. Vuokralainen maksaa mökin vuokrauksesta 200 € kuukaudessa. Olli teetti mökkiin 1600 eurolla erilaisia korjauksia, jotka sai huomioida verotuksessa. Kuinka paljon Olli joutui maksamaan veroa vuokratuloistaan?

46. Vaari jättää perintönä Einolle 134 328 euron arvoisen kesämökin. Kuinka paljon Eino joutuu maksamaan perintöveroa?

E2 47. Otto saa 15 000 euron rahalahjan. Kuinka paljon Oton tulee maksaa lahjastaan veroa, kun hän saa lahjan a) äidiltään b) serkultaan c) puoliksi isoisältään, puoliksi isoäidiltään?

48. Pinja saa kahdelta sisareltaan Ullalta ja Maijalta valmistujaislahjaksi 8500 €. Ulla lahjoittaa summasta 60 % ja Maija loput. Kuinka paljon Pinjan tulee maksaa lahjastaan lahjaveroa?

E3 49. Iiro maksaa perinnöstään veroa 5400 €. Kuinka suuresta perinnöstä on kyse, kun Iiro perii tätinsä?

50. Selvitä Verohallinnon internet-sivuilta (www.vero.fi) oman kotikuntasi kiinteistöveroprosentit vakituiselle asuinrakennukselle ja muulle asuinrakennukselle (esimerkiksi kesämökki). Laske, kuinka paljon kiinteistöveroa tulee maksaa vuodessa
    a) omakotitalosta, jonka verotusarvoksi on määritetty 175 000 €
    b) kesämökistä, jonka verotusarvo on 50 000 €.

51. Panu säästi säännöllisesti rahaa säästötililleen. Koska Panun kuukausitulot vaihtelivat kuukausittain välillä paljonkin, hän päätti tallettaa säästötilille rahasumman, joka riippui aina kyseisen kuukauden kuukausituloista. Panu tutki erilaisia verotustaulukoita ja päätti rakentaa samalla periaatteella oman ”säästötaulukon”.

Kuukausitulot (€)		Vakiosäästösumma alarajan kohdalla (€)	Säästöprosentti alarajan ylittävältä osalta (%)
Alaraja	Yläraja		
0	1000	0	2
1000	1500	20	5
	2000		7
2000	2500		
2500	3000	120	10

a) Täydennä taulukon puuttuvat tiedot.
b) Laske taulukon perusteella, kuinka paljon Panu tallettaa säästötililleen 2400 euron kuukausituloistaan.

Arvonlisävero E4

52. Täydennä puuttuvat arvot:

Tuote tai palvelu	Veroton hinta (€)	Alv (€)	Verollinen hinta (€)
leipä (alv 13 %)	0,93		
cd-soitin (alv 23 %)			139,00
taksi (alv 9 %)		4,21	
tuote A (23 %)			1,52*a*

53. Tino tankkaa autoonsa 95-oktaanista bensiiniä. Bensiinin hinta huoltoasemalla on 1,30 €/litra. Hinta sisältää polttoaineveroa 62,70 senttiä. Polttoaineen arvonlisävero on 23 %, ja se maksetaan myös polttoaineverosta.
a) Mikä on polttoaineen veroton hinta?
b) Kuinka paljon bensiinilitran lopullisesta hinnasta on veroa?

54. Kauppalaskun loppusumma on 34,20 €. Yhtä tuotetta lukuun ottamatta kaikki ostetut tuotteet ovat elintarvikkeita, joiden veroton yhteishinta on 21,20 €. Kun yksi tuote verotetaan 23 %:n mukaan, niin kuinka paljon laskun loppusummasta on arvonlisäveroa?

55. Yritys asettaa tuotteensa verottomaksi myyntihinnaksi 18,00 €. Yritys myy tuotteensa kauppiaalle lisäten tuotteen hintaan 23 % arvonlisäveron. Kauppias asettaa tuotteen verottomaksi myyntihinnaksi 25,00 €.
a) Mikä on kuluttajan maksama hinta?
b) Mikä kauppiaan maksama hinta?
c) Kuinka paljon kauppias tilittää tuotteen hinnasta arvonlisäveroa valtiolle?

E5 56. Vimma Oy:n ostot kuukauden aikana ovat 20 000 € (sis. alv:n, 23 %). Kuukauden myyntituotot ovat 40 000 € (sis. alv:n, 23 %). Kuinka paljon Vimma Oy tilittää arvonlisäveroa kuukauden lopussa valtiolle?

57. Matkapuhelinvalmistaja myy erän kännyköitä arvonlisäverolliseen hintaan 7400 € kännykkäliikkeeseen. Liike myy kännykät kuluttajille ja saa niiden myynnistä 10 400 €. Kuinka paljon
a) kännykkäliike tilittää arvonlisäveroa
b) valtio saa yhteensä arvonlisäveroa?

58. Kuinka monta prosenttia arvonlisävero on verollisesta hinnasta, jos se on verottomasta hinnasta a) 23 % b) 9,0 % c) 13 %?

59. Jos matkalippujen arvonlisävero nousisi 9 prosentista 13 prosenttiin, kuinka monta prosenttia muuttuisi verollinen hinta, jos veroton hinta
a) pysyy ennallaan b) laskee 10 % c) nousee 5 %?

60. Jasper osti kioskilta karkkipussin (alv 13 %) ja aikakauslehden (alv 9 %). Ostokset maksoivat yhteensä 7,80 €, josta arvonlisäveroa oli 76 senttiä. Laske karkkipussin ja aikakauslehden verottomat hinnat.

61. Yritys tilitti valtiolle arvonlisäveroa 3560,75 € kuukaudessa. Kuinka suuret olivat yrityksen myyntitulot (alv 23 %), kun yritys oli tehnyt erilaisia tarvikeostoja 12 400 eurolla (alv 23 %)?

62. Kalastaja myy pyydystämiään kaloja tukkukauppaan 3,00 €:n kilohinnalla. Tukkukauppias myy kalat edelleen kalakauppiaalle kaksi kertaa kalliimmalla hinnalla. Laske kalojen verollinen kilohinta kalakaupassa, kun kalakauppias tilittää arvonlisäveroa valtiolle 49 senttiä yhtä kalakiloa kohti.

63. Käsityökaupassa myydään villapaitoja 150,00 euron hintaan. Villapaidat ovat käsin kudottuja. Kauppias on ostanut paidat kutojalta 95,00 euron kappalehinnalla. Kutoja puolestaan on maksanut yhteen paitaan tarvittavista langoista yhteensä 25,00 €.
   a) Kuinka paljon kutoja tilittää valtiolle arvonlisäveroa yhdestä villapaidasta?
   b) Kuinka paljon käsityökauppias tilittää valtiolle arvonlisäveroa yhdestä villapaidasta?
   c) Kuinka paljon valtio saa arvonlisäveroa yhdestä villapaidasta?

Sekalaisia tehtäviä

64. Nelli vuokrasi ulkomaille muuton vuoksi asuntonsa kolmeksi vuodeksi 500,00 euron kuukausivuokralla. Viimeisenä vuokrausvuotena asuntoon tehtiin peruskorjauksia, joiden kustannukset olivat yhteensä 5000,00 €. Nelli nosti tästä syystä viimeisen vuoden kuukausivuokraa 25,00 €. Kuinka paljon Nelli joutui maksamaan veroa vuokratuloistaan, kun asunnon yhtiövastike on 90,00 € kuukaudessa?

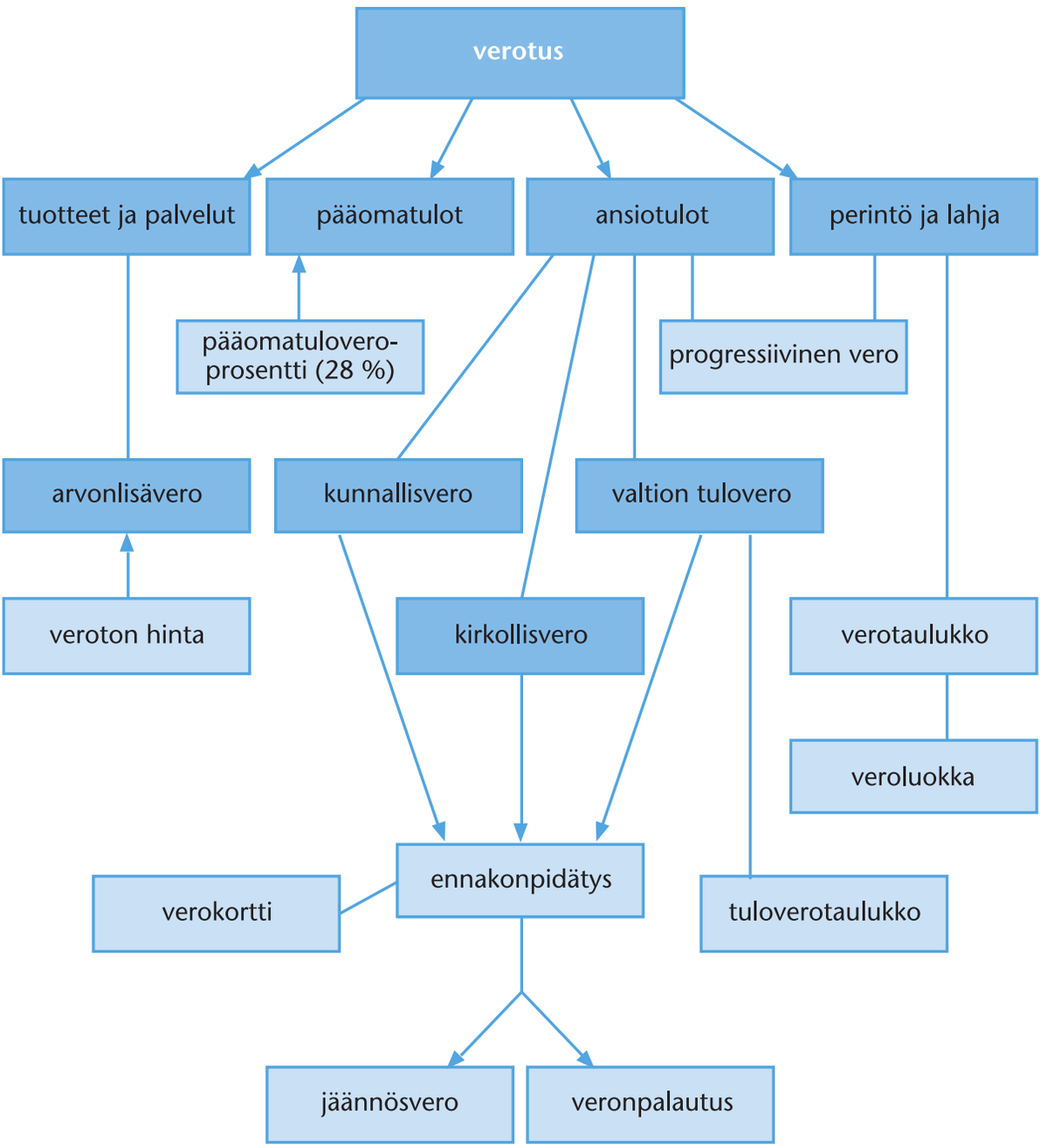
65. Parturi- ja kampaamopalvelujen arvonlisävero oli 22 % vuonna 2006. Vuonna 2010 arvonlisävero oli 13 prosenttiyksikköä pienempi. Kuinka paljon hiusten leikkauksen tulisi maksaa vuonna 2010, jos leikkauksen veroton hinta pysyisi samana? Vuonna 2006 hiusten leikkaus maksoi 23 €.

66. Mikko saa 12 000 €:n rahalahjoituksen. Lahjoituksesta puolet tulee Mikon äidiltä ja puolet äidin sisarelta.
   a) Kuinka paljon Mikolle jää lahjoituksesta puhtaana käteen verojen jälkeen?
   b) Kuinka monta prosenttia lahjasummasta menee veroihin?

67. Oona osti kaupasta elintarvikkeita ja vaatteita. Kauppalasku oli yhteensä 167,60 €, josta oli arvonlisäveroa 30,00 €. Laske elintarvikeostosten ja vaateostosten verottomat hinnat.

68. Mansikanviljelijä myy tukkukauppiaalle mansikoita keskimäärin 2,50 euron kilohintaan. Tukkukauppias myy mansikat puolestaan jälleenmyyjille keskimäärin 4,50 euron kilohinnalla. Kun kuluttaja ostaa jälleenmyyjältä kilon mansikoita, hän maksaa keskimäärin 75 senttiä arvonlisäveroa.
   a) Kuinka paljon arvonlisäveroa mansikkakiloa kohti tilittävät mansikanviljelijä, tukkukauppias ja jälleenmyyjä?
   b) Kuinka paljon kuluttaja maksoi mansikkakilosta?

Keskeisiä käsitteitä



3 Korkolasku

3.1 Yksinkertainen korkolasku

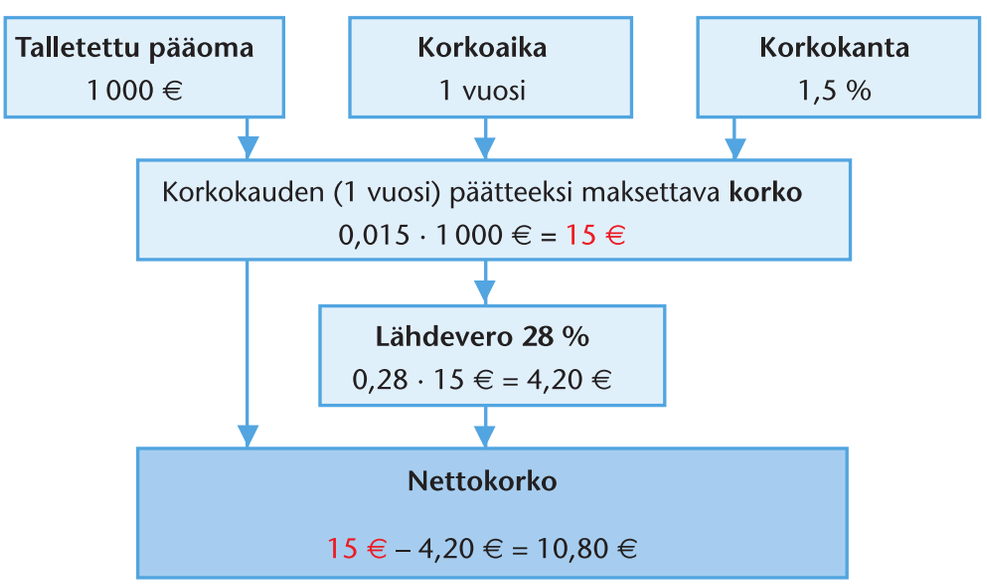
Kun pankkiin talletetaan rahaa, pankki maksaa talletukselle korkoa sovitun korkoprosentin mukaan. Koron suuruus riippuu

- talletetusta rahamäärästä eli **pääomasta**
- talletusajasta eli **korkoajasta**
- korkoprosentista eli **korkokannasta**.

Korko lisätään pääomaan aina **korkokauden** jälkeen. Korkokausi on yleensä vuoden mittainen, ellei toisin mainita. Kun talletusaika on korkeintaan yhden korkokauden mittainen, puhutaan **yksinkertaisesta korkolaskusta**.

Talletusten korkotuotto on veronalaista pääomatuloa, jota verotetaan pääomatulojen veroprosentin mukaan (28 % vuonna 2010). Korkotulojen kohdalla tätä veroa kutsutaan **lähdeveroksi**. Korkotulojen lähdeveron perii koron maksaja, eli tallettajan ei tarvitse sitä valtiolle tilittää.

Kun pankin maksamasta korosta vähennetään lähdevero, saadaan **nettokorko** eli talletukselle todellisuudessa maksettava korko.



Kun korkokannasta poistetaan lähdeveron osuus, saadaan **nettokorkokanta**. Sen avulla voidaan helposti laskea nettokorko.

Jos pääoma kasvaa korkoa korkokautta lyhyemmän ajan, on talletusaika huomioitava korkoa laskettaessa. Korko saadaan laskettua kertomalla alkuperäinen pääoma nettokorkokannalla ja korkoajalla.

Talletettu pääoma 1000 €		
Korkokanta 1,5 %		
Nettokorkokanta Nettokorko on 100 % – 28 % = 72 % alkuperäisestä korosta. Nettokorkokanta on 0,72 · 1,5 % = 1,08 % = 0,0108.		
Korkoaika 1 vuosi	**Korkoaika** 6 kk = 0,5 vuotta	**Korkoaika** 3 kk = 0,25 vuotta
Nettokorko 0,0108 · 1000 € = 10,80 €	**Nettokorko** 0,0108 · 1000 € · 0,5 = 5,40 €	**Nettokorko** 0,0108 · 1000 € · 0,25 = 2,70 €

Yksinkertainen korkolasku

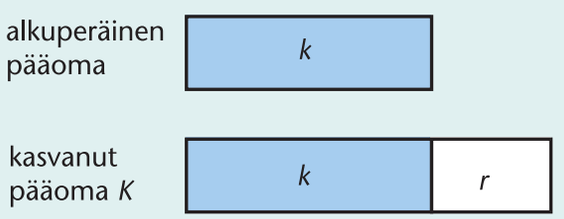
korko

$r = kit$

- k = alkuperäinen pääoma
- i = korkokanta (nettokorkokanta)
- t = korkoaika korkokausina

kasvanut pääoma

$K = k + r$
$= k + kit$



ESIMERKKI 1 Kuinka suureksi kasvaa sijoitustilille talletettu 1500 euron pääoma vuodessa, kun tilin korkokanta on 3,5 % ja lähdevero 28 %?

RATKAISU Tilin nettokorkokanta on $0{,}72 \cdot 3{,}5\ \% = 2{,}52\ \%$.

Tapa 1. Lasketaan nettokorko erikseen.

Nettokorko on

$$0{,}0252 \cdot 1500\ € = 37{,}80\ €$$ *r = kit*

Nettokorko lisätään pääomaan, joten kasvanut pääoma on $1500\ € + 37{,}80\ € = 1537{,}80\ €$. *K = k + kit*

100 % + 2,5 %

Tapa 2. Lasketaan suoraan kasvanut pääoma.

Kasvanut pääoma on

$$1{,}0252 \cdot 1500\ € = 1537{,}80\ €$$

VASTAUS Pääoma on vuoden kuluttua 1537,80 €.

ESIMERKKI 2 Kuinka monessa päivässä 2300 €:n pääoma kasvaa korkoa vähintään 5 €, kun korkokanta on 2,5 % ja lähdevero 28 %?

RATKAISU Korkoajan t laskemiseksi tarvitaan nettokorkokanta i. Kun lähdevero otetaan huomioon, nettokorkokanta on

$$0{,}72 \cdot 2{,}5\ \% = 1{,}8\ \% \quad \text{eli} \quad i = 0{,}018$$

Pääoman korko $r = 5\ €$. Saadaan siis yhtälö

$$5 = 2300 \cdot 0{,}018 \cdot t$$ *r = kit*

$$5 = 41{,}4t$$

$$41{,}4t = 5 \quad | : 41{,}4$$

$$t = 0{,}1207\ldots$$

Korkoaika on $t = 0{,}1207\ldots\ \text{a} = 0{,}1207\ldots \cdot 365\ \text{d} = 44{,}082\ldots\ \text{d}$.

VASTAUS 45 päivässä

Pankista lainatun rahan hinta muodostuu korosta. Lainojen ja talletusten kohdalla käytössä on erilaisia korkoja:

- primekorko
- euribor 360 -viitekorko
- euribor 365 -viitekorko
- euribor 6 kk.

Kaikki nämä korot ovat **viitekorkoja**, joihin lisätään lainoissa vielä asiakaskohtainen **korkomarginaali**.

lainan korko = viitekorko + korkomarginaali

Yksityishenkilöiden talletuksille pankki määrittelee yleensä kiinteän koron.

Euriborkorko (Euro Interbank Offered Rate) on koko euroalueen yhteinen viitekorko. Nämä viitekorot lastetaan päivittäin 1, 2 ja 3 viikon sekä 1–12 kuukauden korkojaksoille. Euribor 360- ja euribor 365 -viitekorkojen erona on korkolaskujen laskennallisessa vuodessa olevien päivien lukumäärä (360 tai 365).

Primekorko on pankin oma viitekorko. Primekorot ovat yleensä euriborkorkoja vakaampia, koska niitä tarkistetaan huomattavasti euriboreja harvemmin.

	Euribor 360	Euribor 365
1 vko	0,343	0,348
1 kk	0,421	0,427
3 kk	0,662	0,671
6 kk	0,965	0,978
12 kk	1,225	1,242

18.2.2010 Helsingin Sanomat

Primekorkoja	
Nordea Prime	1,80 %
Sampo Prime	1,75 %
OP-Prime	1,70 %
Handelsbanken Prime	1,50 %
Aktia Prime	1,75 %

18.2.2010 Helsingin Sanomat

Euroopan keskuspankki suosittelee käytettäväksi laskennallisena korkopäivien määränä 360 päivää. Suomessa ennen vuotta 1999 otetuissa lainoissa käytetään viitekorkona pääsääntöisesti euribor 365 -korkoja.

Korkolaskuissa vuodessa olevien päivien määrä riippuu tehtävästä. Tehtävissä voidaan olettaa korkopäivien määräksi vuodessa 365 päivää ellei toisin mainita tai käytettävä viitekorko sitä edellytä (euribor 360). Kun lasketaan korkopäiviä, talletuspäivä ei ole korkopäivä, mutta nostopäivä on.

ESIMERKKI 3

Kaarle tallettaa korkeakorkoiselle tilille 3400 euroa 4.3.2010. Kuinka paljon Kaarlen talletus on kasvanut korkoa vuoden loppuun mennessä, kun talletuksen viitekorko on
a) euribor 360 (12 kk) b) euribor 365 (12 kk)?

RATKAISU

Lasketaan ensin korkopäivien lukumäärä.

Talletuspäivä ei ole korkopäivä, nostopäivä on.

maaliskuu	31 − 4 = 27 päivää	} korkopäiviä yhteensä 302
huhtikuu	30 päivää	
toukokuu	31 päivää	
kesäkuu	30 päivää	
heinäkuu	31 päivää	
elokuu	31 päivää	
syyskuu	30 päivää	
lokakuu	31 päivää	
marraskuu	30 päivää	
joulukuu	31 päivää	

a) 12 kuukauden euribor 360 on 1,225 %. Korkopäiviä on vuodessa 360.

$$\text{Korko on } r = 3400 \cdot 0{,}01225 \cdot \frac{302}{360} = 34{,}939\ldots \approx 34{,}94\ (€)\,.$$

Kummassakin tilanteessa korko on sama. Tallettajan kannalta on siis yhdentekevää, kumpaan viitekorkoon (euribor 360 vai euribor 365) talletus sidotaan.

b) 12 kuukauden euribor 365 on 1,242 %. Korkopäiviä on vuodessa 365.

$$\text{Korko on } r = 3400 \cdot 0{,}01242 \cdot \frac{302}{365} = 34{,}939\ldots \approx 34{,}94\ (€)\,.$$

VASTAUS

a) 34,94 € b) 34,94 €

ESIMERKKI 4

Verneri talletti 230 euroa kesätyörahoistaan pankkiin 15.8.2010. Joulukuun 20. päivä Verneri nosti talletuksensa ostaakseen joululahjoja. Tällä välin nettokorkoa oli kertynyt 2,20 €. Mikä oli talletuksen a) nettokorkokanta b) korkokanta?
Lähdevero on 28 %.

RATKAISU

a) Lasketaan todellisten korkopäivien määrä.

Korkopäiviä: elokuussa $31 - 15 = 16$
syyskuussa 30
lokakuussa 31
marraskuussa 30
joulukuussa 20

Korkopäiviä on yhteensä $16 + 30 + 31 + 30 + 20 = 127$.

Korkoaika on tällöin $t = \frac{127}{365}$.

Ratkaistaan yksinkertaisen koron kaavasta korkokanta i.

$$r = kit \quad | : kt$$
$$\frac{r}{kt} = i$$

Koska korko on $r = 2{,}20$ €, alkuperäinen pääoma $k = 230$ € ja korkoaika $t = \frac{127}{365}$, talletuksen nettokorkokanta on

$$i = \frac{2{,}20}{230 \cdot \frac{127}{365}}$$
$$= 0{,}027\,49\ldots$$
$$= 2{,}749\ldots\,\% \approx 2{,}7\,\%$$

b) Merkitään korkokantaa kirjaimella x. Koska lähdevero on 28 %, saadaan yhtälö

$$0{,}72x = 0{,}02749\ldots \quad | : 0{,}72$$
$$x = 0{,}03818\ldots$$
$$x = 3{,}818\ldots\,\% \approx 3{,}8\,\%$$

VASTAUS

a) Nettokorkokanta on 2,7 %. b) Korkokanta on 3,8 %.

ESIMERKKI 5 Paavo tallettaa aina kuukauden ensimmäisenä päivänä tililleen 50 €. Kuinka paljon Paavon tilillä on rahaa vuoden kuluttua, kun tilin korkokanta on 1,40 %?

RATKAISU Tarkastellaan koron määrää taulukon avulla.

	Talletus (€)	Korkoaika vuosina	Korko vuoden kuluttua (€)
1. talletus	50	$\frac{12}{12}$	$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{12}{12}$
2. talletus	50	$\frac{11}{12}$	$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{11}{12}$
3. talletus	50	$\frac{10}{12}$	$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{10}{12}$
4. talletus	50	$\frac{9}{12}$	$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{9}{12}$
⋮			
12. talletus	50	$\frac{1}{12}$	$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{1}{12}$

Lasketaan yhteen erilliset korot vuoden kuluttua.

Otetaan $50 \cdot 0{,}0140$ yhteiseksi tekijäksi.

$$50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{12}{12} + 50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{11}{12} + 50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{10}{12} + \cdots + 50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{1}{12}$$
$$= 50 \cdot 0{,}0140\left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right)$$

Lukujonot ja summat s. 151

Summa $\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12}$ on aritmeettinen.

$$\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \cdots + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} = 12 \cdot \frac{\frac{12}{12} + \frac{1}{12}}{2} = \frac{13}{2}$$

aritmeettinen summa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

Korko vuoden kuluttua on $50 \cdot 0{,}0140 \cdot \frac{13}{2} = 4{,}55\ (€)$.

Vuoden kuluessa tilille on talletettu $12 \cdot 50\ € = 600\ €$, joten tilillä on rahaa vuoden kuluttua $600\ € + 4{,}55\ € = 604{,}55\ €$.

VASTAUS Tilillä on rahaa vuoden kuluttua 604,55 €.

Tehtäviä

Käytä tehtävissä sivun 44 viitekorkoja. Lähdevero otetaan huomioon niissä tehtävissä, joissa vero on mainittu.

E1 69. Hanna tallettaa 150 € vuodeksi tilille, jonka korko on 1,7 %.
a) Kuinka paljon talletuksesta maksetaan korkoa?
b) Kuinka paljon korosta maksetaan lähdeveroa? Lähdevero on 28 %.
c) Mikä on tilin nettokorkokanta?
d) Kuinka suureksi talletettu pääoma kasvaa vuodessa?

70. Martti tallettaa säästötililleen 400 €.
a) Mikä on tilin nettokorkokanta, kun tilin korkokanta on 1,25 %? Lähdevero on 28 %.
b) Kuinka suureksi talletus kasvaa vuodessa?
c) Kuinka suureksi talletus kasvaa neljässä kuukaudessa?

71. Vesa tallettaa 10.6.2010 osan ylioppilaslahjaksi saamistaan rahoista opiskelua varten säästötilille. Tilin korko on 0,85 % ja talletuksen suuruus 250 €.
a) Laske tilin nettokorkokanta. Lähdevero on 28 %.
b) Kuinka paljon Vesan tilillä on rahaa opiskelujen alkaessa 14.9.2010?

E3 72. Tuuli tallettaa 2300 € 15.4.2010 korkeakorkoiselle tilille.
a) Kuinka paljon Tuulin talletus on kasvanut korkoa vuoden loppuun mennessä, kun talletuksen viitekorko on euribor 360 (12 kk)?
b) Kuinka paljon Tuulin talletus on kasvanut korkoa lokakuun loppuun mennessä, kun viitekorko on euribor 365 (12 kk)?

E4 73. Selma talletti vuoden ensimmäisenä päivänä 100 € pankkiin. Tasan kolmen kuukauden kuluttua hän nosti tallettamansa rahat korkoineen. Hän sai tällöin pankista verojen vähentämisen jälkeen 101,60 €. Laske
a) nettokorkokanta
b) tilin korkokanta.
Lähdevero on 28 %.

74. Maaliskuun 10. päivä Leevi talletti tililleen 500 €. Syyskuun 16. päivä hän nosti tallettamansa summan korkoineen. Korkoa oli tällöin kertynyt 3,80 €. Kuinka suuri oli tilin korkokanta?

75. Aapo lainasi pankista 1200 € uusien huonekalujen ostoon. Hän maksoi koko lainasumman korkoineen takaisin puolen vuoden kuluttua. Korko oli sidottu pankin omaan 2,50 %:n primekorkoon. Kuinka suuri oli koron marginaali, kun Aapon takaisin maksama määrä oli 1223,40 €?

E2 76. Tilille, jonka korkokanta on 1,60 %, talletetaan 730 €. Kuinka monessa päivässä talletettu pääoma on kasvanut korkoa 3 €?

77. Leila talletti kesäkuun ensimmäisenä päivänä 2300 € tilille, jonka korkokanta oli 1,75 %. Minä päivänä Leila nosti talletuksensa, kun hän sai pankista verojen vähentämisen jälkeen 2302,54 €? Talletuksen nostopäivä on korkopäivä, talletuspäivä ei ole korkopäivä. Lähdevero on 28 %.

78. Lauri nosti talletuksensa vuoden kuluttua talletushetkestä. Hän sai pankista verojen vähentämisen jälkeen 231,80 €. Kuinka paljon Lauri oli tililleen tallettanut, kun tilin korkokanta oli 1,30 %? Lähdevero on 28 %.

79. Jutta lainasi pankista rahaa vuokra-asunnon takuuvuokria varten. Hän maksoi lainan kokonaisuudessaan takaisin kahden kuukauden kuluttua lainan ottamisesta. Tällöin maksusumma korkoineen oli 2508,93 €. Kuinka suuren lainan Jutta oli ottanut, kun lainan korko oli sidottu 12 kuukauden euribor 365 -viitekorkoon 0,90 %:n marginaalilla?

80. Iina ottaa pankkivekselin. Kolmen kuukauden kuluttua Iina maksaa takaisin lainan ja korot. Kuinka suuren vekselin Iina otti, kun korot tekevät 20,40 € ja vuotuinen korko on 13,6 %?

81. Selvitä tämänhetkiset arvot 3 kuukauden ja 12 kuukauden euriborkoroille. Kuinka monta a) prosenttiyksikköä b) prosenttia nämä ovat muuttuneet kirjassa oleviin lukuihin verrattuna?

82. Pankkiiri sijoittaa tammikuun alussa summan arvopaperiin. Sijoituksen vuosikorko on 12 %. Heinäkuun alussa hän sijoittaa kaksi kertaa niin suuren summan kuin tammikuussa. Vuoden lopussa hän nostaa sijoitukset korkoineen ja saa näin takaisin 48 600 €. Minkä summan pankkiiri sijoitti tammikuussa?

83. Essi joutui ottamaan 9000 €:n lainan uutta autoaan varten. Lainaa maksetaan takaisin kuukausittain 250 €. Lisäksi maksetaan korot siitä summasta, joka vielä on jäljellä. Kuukausikorko on 0,3 %. Kuinka paljon Essi maksaa yhteensä korkoa lainastaan?

E5 84. Juhani talletti aina palkkapäivänään joka kuukausi 100 € erilliselle säästötilille, jonka korko oli 1,65 %. Kuinka paljon tilillä on rahaa vuoden kuluttua?

85. Maari ja Katri säästivät rahaa kimppa-autoon. Kumpikin talletti joka kuukauden ensimmäinen päivä omille tileilleen rahaa. Maari talletti 45 € kuukaudessa tilille, jonka korko oli 1,18 %. Katri talletti 40 € tilille, jonka korko oli 2,35 %.
   a) Kumman säästötilillä on enemmän rahaa vuoden kuluttua?
   b) Olisiko ollut kannattavampaa tallettaa rahat yhteiselle tilille, jonka korko on 1,90 %?

86. Veeti aikoo hankkia vuoden kuluttua uuden tietokoneen. Hän arvelee saavansa säästettyä tarvittavat rahat tallettamalla joka kuukausi vuoden ajan yhtä suuren summan säästötililleen. Kuinka paljon Veetin tulee kuukaudessa tililleen tallettaa, kun hän arvioi tarvitsevansa tietokoneen ostoon 1500 euroa? Tilin korkoprosentti on 1,73 %.

87. Insinööri Virtanen oli tallettanut asunnon myynnistä saamansa 500 000 markan kauppasumman vuoden 1999 alussa tilille, jolle pankki maksoi 2,00 prosentin verotonta vuosikorkoa. Talletuskorkojen verotus muuttui 1.6.2000 siten, että tästä päivästä alkaen kertyvät korot ovat kaikki veronalaisia. Koroista menee 29 prosentin lähdevero, jonka pankki perii talletuksen noston yhteydessä täysiksi markoiksi pyöristettynä. Verotuskäytännön muuttuessa pankki lisäsi Virtasen tilille vuoden alusta siihen mennessä kertyneet korot. Kuinka paljon rahaa Virtanen sai nostaessaan tilillä olevat varat 25.8.2000? Pankki laski talletukselle koron todellisten päivien mukaan tallettamispäivästä nostopäivään nostopäivää lukuun ottamatta. Karkausvuoteen 2000 pankki laski kuuluvaksi 366 päivää. [K2001, 14]

Sekalaisia tehtäviä

88. Harri talletti tililleen 650 €. Tilin korkokanta oli 1,47 %.
a) Mikä oli tilin nettokorkokanta? Lähdevero on 28 %.
b) Kuinka suureksi talletus on kasvanut vuodessa?
c) Kuinka suureksi talletus on kasvanut neljän kuukauden aikana?

89. Luokkaretkirahat talletettiin luokan omalle tilille odottamaan lähtöhetkeä. Tilin korko oli 1,95 %. Kuinka kauan rahat tilillä olivat, kun 6700 euron summa oli kasvanut 6730,93 euroksi? Lähdevero on 28 %.

90. 4.5.2010 Ida talletti 135 € säästötililleen. Hän nosti tekemänsä talletuksen 6.8.2010, jolloin hän sai verojen vähentämisen jälkeen 136,70 €. Laske
a) nettokorkokanta b) tilin korkokanta. Lähdevero on 28 %.

91. Eemeli lainasi rahaa lomamatkaa varten. Viiden kuukauden kuluttua Eemeli maksoi korkoineen lainaamansa summan takaisin. Laina oli sidottu 12 kuukauden euribor 365 -viitekorkoon 2,3 %:n marginaalilla. Eemeli maksoi korkoa 5,16 €. Kuinka suuren summan Eemeli lomamatkaansa varten lainasi?

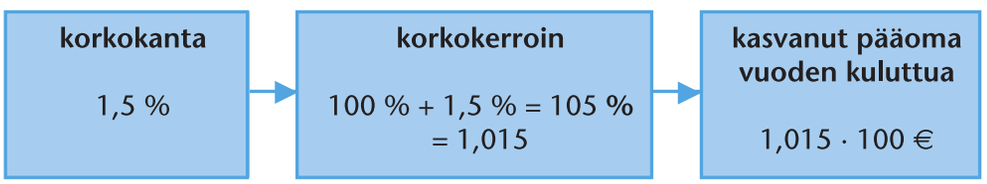
92. Titta talletti helmikuusta lähtien joka kuukauden alussa 50 € tililleen, jonka korkokanta oli 1,84 %. Kuinka paljon Titan tilillä on rahaa vuoden lopussa?

3.2 Koronkorkolasku

Koronkorko

Tilille, jonka korkokanta on 1,5 %, talletetaan vuoden alussa 100 €. Tarkastellaan rahamärän kasvua vuosi kerrallaan. Jätetään lähdevero huomioimatta.

Jotta korkoa ei tarvitse joka vuosi laskea ensin erikseen, käytetään laskuissa hyväksi **korkokerrointa**. Korkokerroin on kasvanutta pääomaa kuvaava prosenttikerroin, eli jos korkokanta on esimerkiksi 1,5 %, on sitä vastaava korkokerroin 1,015. Tällöin kasvanut pääoma saadaan, kun alkuperäinen pääoma kerrotaan korkokertoimella. korkokanta korkokerroin kasvanut pääoma vuoden kuluttua



Koska korko lisätään pääomaan aina yhden korkokauden jälkeen, tilillä oleva pääoma muuttuu joka vuosi. Koron lisäyksen jälkeen seuraavana vuonna korkoa maksetaan myös pääomaan lisätylle korolle. Tästä syystä tilannetta, jossa **tarkasteltava aikaväli on korkokautta pidempi, kutsutaan koronkorkolaskuksi**.

Ilmoitetaan kasvanut pääoma lausekkeena.

	Tilillä rahaa ennen koron lisäystä	**Tilillä rahaa koronlisäyksen jälkeen**
talletushetki	100 €	100 €
1 vuoden kuluttua	100 €	1,015 · 100 €
2 vuoden kuluttua	1,015 · 100 €	1,015 · 1,015 · 100 € = $1{,}015^2$ · 100 €
3 vuoden kuluttua	1,015 · 1,015 · 100 €	1,015 · 1,015 · 1,015 · 100 € = $1{,}015^3$ · 100 €
n vuoden kuluttua	$1{,}015^{n-1}$ · 100 €	$1{,}015^n$ · 100 €

Kasvanut pääoma saadaan siis laskettua korkokertoimen eli **korkotekijän**, alkuperäisen pääoman ja korkokausien lukumäärän avulla.

Koronkorko

Kasvanut pääoma
$K = kq^n$

- K = kasvanut pääoma
- k = alkuperäinen pääoma
- q = korkotekijä $\left(1 + \frac{i}{100}\right)$
- n = korkokausien lukumäärä

ESIMERKKI 1

Lotta tallettaa tililleen veronpalautuksena saamansa 215,50 €. Kuinka suureksi rahasumma kasvaa kuudessa vuodessa, kun tilin korkokanta on 1,2 %? Lähdevero on 28 %.

RATKAISU

Tilin korkokanta on 1,2 %, joten nettokorkokanta on

$$0{,}72 \cdot 1{,}2\ \% = 0{,}864\ \%$$

100 % + 0,864 %
= 100,864 %
= 1,00864

Korkotekijä $q = 1 + 0{,}00864 = 1{,}00864$.

Raha on tilillä kuusi vuotta, joten korkokausien lukumäärä $n = 6$.

Pääoma kuuden vuoden kuluttua

$$K = 215{,}50\ € \cdot 1{,}00864^6$$
$$K = 226{,}9156...\ €$$
$$\approx 226{,}92\ €$$

VASTAUS

226,92 €

ESIMERKKI 2

Leena tallettaa sijoitustilille 430 €.

a) Mikä on tilin korkokanta, jos tilillä on viiden vuoden kuluttua 465,50 €?

b) Kuinka monen vuoden kuluttua tilillä on yli 500 €, kun tilin korkokanta on 2,3 %?

RATKAISU

a) Merkitään korkotekijää kirjaimella q. Alkuperäinen pääoma oli 430 € ja kasvanut pääoma 465,50 €, joten saadaan yhtälö

$K = kq^n$

$$430 \cdot q^5 = 465{,}50 \quad | : 430$$

$$q^5 = \frac{465{,}50}{430}$$

$$q = \sqrt[5]{\frac{465{,}50}{430}}$$

$$q = \sqrt[5]{1{,}08255\ldots}$$

$$q = 1{,}01599\ldots$$

Tilin korkokanta on

$$1{,}01599\ldots - 1 = 0{,}01599\ldots = 1{,}599\ldots\,\% \approx 1{,}6\,\%$$

b) Merkitään kysyttyä vuosien määrää kirjaimella n. Alkuperäinen pääoma oli 430 €, kasvanut pääoma 500 € ja korkotekijä on

100 % + 2,3 % = 102,3 % = 1,023

$$q = 1 + 0{,}023 = 1{,}023$$

Saadaan yhtälö

$$1{,}023^n \cdot 430 = 500 \quad | : 430$$

$$1{,}023^n = \frac{500}{430}$$

$$\lg 1{,}023^n = \lg \frac{500}{430}$$

$$n \lg 1{,}023 = \lg \frac{500}{430} \quad | : \lg 1{,}023$$

$$n = \frac{\lg \frac{500}{430}}{\lg 1{,}023}$$

$$n = 6{,}632\ldots$$

500 euroa saavutetaan, kun aikaa on kulunut 6,6 vuotta, joten täysinä vuosina ilmoitettaessa tilillä on yli 500 € seitsemän vuoden kuluttua.

VASTAUS

a) 1,6 % b) 7 vuoden kuluttua

ESIMERKKI 3

Ida tallettaa joka kuukauden alussa tililleen 50 € kymmenen vuoden ajan. Kuinka paljon Idalla on tilillään rahaa kymmenennen vuoden lopussa, kun tilin korkokanta on 0,97 %?

RATKAISU

Tarkastellaan ensin ensimmäisen vuoden talletuksia.

	Talletus (€)	Korko vuoden lopussa (€)
1.	50	$50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{12}{12}$
2.	50	$50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{11}{12}$
3.	50	$50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{10}{12}$
⋮		
12.	50	$50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{1}{12}$

Lasketaan ensimmäisen vuoden talletuksen korot vuoden lopussa.

Otetaan $50 \cdot 0{,}0097$ yhteiseksi tekijäksi.

$$50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{12}{12} + 50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{11}{12} + 50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{10}{12} + \cdots + 50 \cdot 0{,}0097 \cdot \frac{12}{12}$$
$$= 50 \cdot 0{,}0097 \cdot \underbrace{\left(\frac{12}{12} + \frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \cdots + \frac{1}{12}\right)}$$

Aritmeettinen summa

$$S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 12 \cdot \frac{\frac{12}{12} + \frac{1}{12}}{2} = 6{,}5$$

Lukujonot ja summat s. 151

$$= 50 \cdot 0{,}0097 \cdot 6{,}5 = 3{,}1525 \approx 3{,}15\ (€)$$

Tilillä on ensimmäisen vuoden talletusten ja korkojen jälkeen

$$12 \cdot 50\ € + 3{,}15\ € = 603{,}15\ €$$

Kaikkien muidenkin yksittäisten vuosien talletukset ovat suuruudeltaan 603,15 €. Jokainen näistä kasvaa korkoa korolle eri määrän.

Tarkastellaan talletuksia vuosittain.

	Talletus vuoden lopussa (€)	Talletus talletusajan lopussa (€)
1. vuoden talletus	603,15	$603{,}15 \cdot 1{,}0097^9$
2. vuoden talletus	603,15	$603{,}15 \cdot 1{,}0097^8$
3. vuoden talletus	603,15	$603{,}15 \cdot 1{,}0097^7$
⋮		
10. vuoden talletus	603,15	$603{,}15 \cdot 1{,}0097^0 = 603{,}15$

Lasketaan yhteen kaikki kymmenen eri vuoden talletusta korkoineen.

Otetaan 603,15 yhteiseksi tekijäksi.

$$603{,}15 \cdot 1{,}0097^9 + 603{,}15 \cdot 1{,}0097^8 + 603{,}15 \cdot 1{,}0097^7 + \ldots + 603{,}15$$
$$= 603{,}15 \cdot \underbrace{(1{,}0097^9 + 1{,}0097^8 + \ldots + 1{,}0097^1 + 1)}$$

Lukujonot ja summat s. 151

Geometrinen summa, suhdeluku $\frac{1{,}0097^8}{1{,}0097^9} = 1{,}0097^{-1}$

$$S = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 1{,}0097^9 \cdot \frac{1-(1{,}0097^{-1})^{10}}{1-1{,}0097^{-1}}$$
$$= 1{,}0097^9 \cdot \frac{1-1{,}0097^{-10}}{1-1{,}0097^{-1}}$$
$$= 10{,}4479\ldots$$

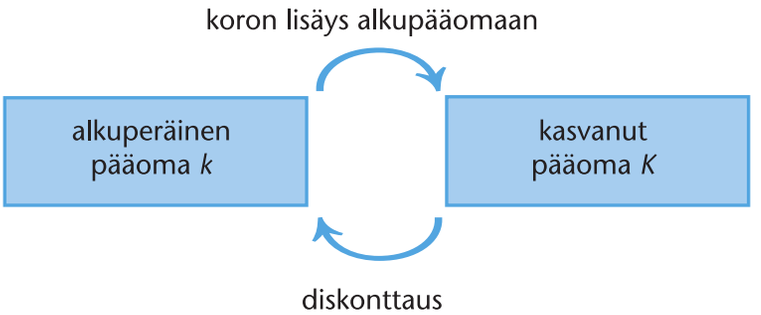
$$= 603{,}15 \cdot 10{,}4479\ldots$$
$$= 6301{,}701\ldots$$
$$\approx 6301{,}70\ (€)$$

VASTAUS 6301,70 €

Diskonttaus

Talouselämässä tulee eteen tilanteita, joissa tunnetaan kasvanut pääoma ja halutaan selvittää alkuperäinen pääoma. Alkuperäistä pääomaa kutsutaan tällöin **nykyarvoksi**. Rahan arvon muuttamista ajassa taaksepäin kutsutaan **diskonttaukseksi**. Korkolaskujen kannalta tämä tarkoittaa korkokausien aikana kertyneen koron poistamista.

Investointilaskenta s. 159

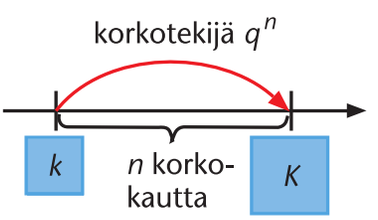


Diskonttausta käytetään esimerkiksi,

- kun halutaan tietää, kuinka paljon pitäisi tilille tallettaa nyt, jotta 10 vuoden kuluttua tilillä on halutun suuruinen pääoma
- kun vertaillaan kaupantekohetkellä erilaisia maksusuoritusvaihtoehtoja.

Koronkorkolaskussa kasvanut pääoma K saadaan kaavalla

$$K = k \cdot q^n$$



Ratkaistaan tästä alkuperäinen pääoma eli nykyarvo k.

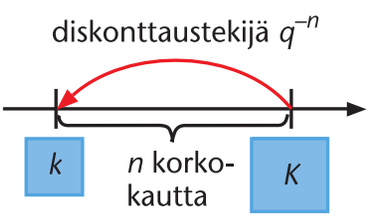
$$K = k \cdot q^n \quad \Big| : q^n$$

$$\frac{K}{q^n} = k$$

$$k = \frac{1}{q^n} \cdot K$$

$$k = K \cdot q^{-n}$$

$\frac{1}{q^n} = q^{-n}$

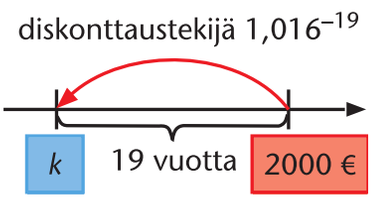


Kerrointa $\frac{1}{q^n} = q^{-n}$ kutsutaan diskonttaustekijäksi. Sen avulla nykyarvo voidaan laskea helposti.

ESIMERKKI 4 Oonan kummitäti avaa kummilapselleen 1-vuotislahjaksi tilin, jonka korkokanta on 1,6 %. Laske euron tarkkuudella, kuinka paljon kummitädin pitää tilille tallettaa Oonan yksivuotispäivänä, jotta Oona voi 20-vuotispäivänään nostaa tililtä 2000 €.

RATKAISU Diskontataan kasvanut pääoma 2000 € talletushetkeen eli 19 vuotta ajassa taaksepäin. Merkitään kysyttyä talletuksen määrää kirjaimella k.

- Tilin korkokanta on 1,6 %, joten korkotekijä on 1,016.
- Korkoaika $n = 19$ vuotta.
- Diskonttaustekijä $q^{-n} = 1{,}016^{-19}$.
- Kasvanut pääoma $K = 2000$ €.



Tililtä nostettavan summan eli kasvaneen pääoman nykyarvo

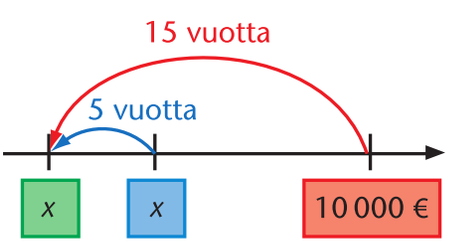
$$k = Kq^{-n} = 2000\ € \cdot 1{,}016^{-19} = 1479{,}277\ldots\ € \approx 1479\ €$$

VASTAUS 1479 €

ESIMERKKI 5 Tilille talletetaan yhtä suuri rahasumma kahdesti viiden vuoden välein. Kuinka suuri tulisi euron tarkkuudella kertatalletuksen olla, jotta 15 vuoden kuluttua ensimmäisestä talletuksesta, tililtä olisi nostettavissa 10 000 €? Tilin korkokanta on 1,25 %.

RATKAISU Merkitään talletettavaa rahamäärää kirjaimella x. Eri aikoina tehtävät talletuksen kasvavat eri määrän korkoa. **Jotta rahasummia voitaisiin tarkastella yhtälön avulla, kaikki summat on siirrettävä samaan ajankohtaan.**

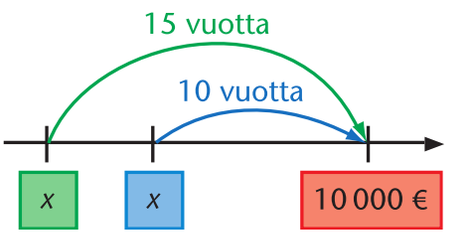
Tapa 1
Diskontataan kaikki rahasummat ensimmäiseen talletushetkeen.



$$x + x \cdot 1{,}0125^{-5} = 10000 \cdot 1{,}0125^{-15}$$
$$x(1 + 1{,}0125^{-5}) = 10000 \cdot 1{,}0125^{-15} \quad \big| : (1 + 1{,}0125^{-5})$$
$$x = \frac{10000 \cdot 1{,}0125^{-15}}{1 + 1{,}0125^{-5}}$$
$$x = 4278{,}80\ldots$$
$$\approx 4279\ (€)$$

Tapa 2

Lisätään talletettuihin rahamääriin korot (koronkorkolasku), jolloin kaikkia rahasummia voidaan tarkastella talletuksen nostohetkellä.



$$1{,}0125^{15}x + 1{,}0125^{10}x = 10000$$
$$x(1{,}0125^{15} + 1{,}0125^{10}) = 10000 \quad \big| : (1{,}0125^{15} + 1{,}0125^{10})$$
$$x = \frac{10000}{1{,}0125^{15} + 1{,}0125^{10}}$$
$$x = 4278{,}80\ldots \approx 4279\ (€)$$

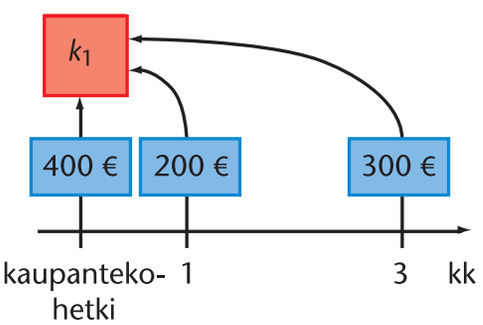
VASTAUS 4279 €

ESIMERKKI 6

Ellu ja Anne ostivat samanhintaiset televisiot eri liikkeistä. Ellu maksaa ostohetkellä 400 €, kuukauden kuluttua 200 € ja kolmen kuukauden kuluttua 300 €. Anne maksaa ostohetkellä 500 € ja neljän kuukauden kuluttua loput. Kuinka suuri tulee Annen jälkimmäisen maksuerän olla, jotta tyttöjen televisiot olisivat maksaneet loppujen lopuksi yhtä paljon? Osamaksun kuukausikorko on 1,4 %, joka sisältyy osamaksuerään.

RATKAISU

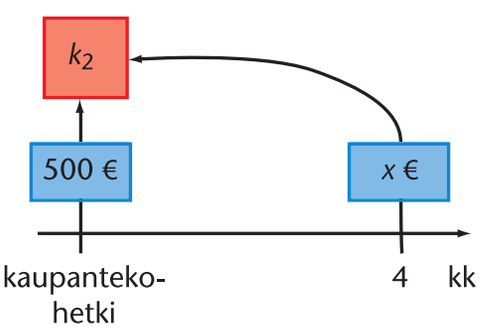
Diskontataan kummankin tytön maksuerät kaupantekohetkeen.



Ellu

Merkitään diskontattua rahasummaa kirjaimella k_1.

$$k_1 = 400 + 200 \cdot 1{,}014^{-1} + 300 \cdot 1{,}014^{-3}$$
$$= 884{,}983\ldots\ (€)$$



Anne

Merkitään jälkimmäisen maksuerän suuruutta kirjaimella x ja koko diskontattua rahasummaa kirjaimella k_2.

$$k_2 = 500 + x \cdot 1{,}014^{-4}$$

Koska Ellun ja Annen televisioiden tulisi loppujen lopuksi olla samanhintaiset, saadaan yhtälö

$$500 + x \cdot 1{,}014^{-4} = 884{,}98\ldots$$
$$1{,}014^{-4}x = 384{,}98\ldots \quad \big| : 1{,}014^{-4}$$
$$x = 406{,}999\ldots \approx 407\ (€)$$

VASTAUS Annen jälkimmäinen maksuerä on 407 €.

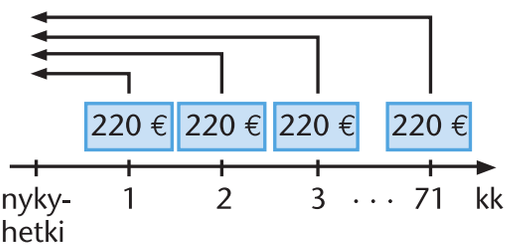
ESIMERKKI 7

Jonna ostaa 25 000 euron hintaisen auton osamaksulla. Hän maksaa ostaessaan käsirahaa 5000 €. Lopun kauppasumman Jonna maksaa autoliikkeen tarjoamalla osamaksulla kuudessa vuodessa. Autolainaa lyhennetään kerran kuukaudessa. Viimeistä maksuerää lukuun ottamatta kaikki maksuerät ovat 220 €. Viimeinen maksuerä on muita suurempi. Laske viimeisen maksuerän suuruus, kun osamaksun kuukausikorko on 0,375 %.

RATKAISU

Koska kuukausikorko on 0,375 %, niin korkotekijä $q = 1{,}00375$.

Diskontataan ensin 220 euron suuruiset maksuerät nykyhetkeen diskonttaustekijän $\dfrac{1}{1{,}00375^n} = 1{,}00375^{-n}$ avulla.



Näitä 220 €:n maksueriä on yhteensä $6 \cdot 12 - 1 = 71$ kappaletta. Tarkastellaan viimeinen 72. maksuerä erikseen.

Otetaan 220 yhteiseksi tekijäksi.

$$220 \cdot 1{,}00375^{-1} + 220 \cdot 1{,}00375^{-2} + \ldots + 220 \cdot 1{,}00375^{-71}$$
$$= 220 \cdot \underbrace{(1{,}00375^{-1} + 1{,}00375^{-2} + \ldots + 1{,}00375^{-71})}$$

Geometrinen summa, suhdeluku $\dfrac{1{,}00375^{-2}}{1{,}00375^{-1}} = 1{,}00375^{-1}$

$$S = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
$$= 1{,}00375^{-1} \cdot \frac{1 - (1{,}00375^{-1})^{71}}{1 - 1{,}00375^{-1}}$$
$$= 62{,}232\ldots$$

220 euron suuruisten maksuerien yhteisarvo diskontattuna nykyhetkeen on siis

$$\begin{aligned} &220\ € \cdot 62{,}232\ldots \\ &= 13\,691{,}0864\ldots\ € \\ &\approx 13\,691{,}09\ € \end{aligned}$$

Merkitään viimeisen maksuerän suuruutta kirjaimella x. Diskontataan myös tämä maksuerä nykyhetkeen.

$$x \cdot 1{,}003\,75^{-72}$$

Auton hinta ostohetkellä oli 25 000 €.

Käsiraha	220 euron maksuerät	Viimeinen maksuerä
5 000 €	13 691,09 €	$x \cdot 1{,}00375^{-72}$ €
Auton hinta 25 000 €		

Saadaan siis yhtälö

$$\begin{aligned} 5000 + 13691{,}09 + x \cdot 1{,}00375^{-72} &= 25000 \\ 1{,}00375^{-72} \cdot x &= 6308{,}91 \quad \big| : 1{,}00375^{-72} \\ x &= 8260{,}275\ldots \end{aligned}$$

VASTAUS Viimeisen maksuerän suuruus on 8260,28 €.

Tehtäviä

Koronkorko

93. Kuinka suureksi 1000 euron talletus kasvaa seitsemässä vuodessa, kun vuosikorko on 1,4 % ja
a) lähdeveroa ei huomioida
b) lähdevero 28 % huomioidaan?

E1 94. Lennu tallettaa kesätyöstään saamansa 125 euron bonusrahat tilille, jonka korko on 1,63 %. Kuinka suureksi talletus kasvaa kymmenessä vuodessa? Lähdevero on 28 %.

E2 95. Sijoitustilille talletetaan 500 € viideksi vuodeksi. Tässä ajassa sijoitus on kasvanut 520 euroon.
a) Mikä on tilin korkokanta?
b) Kuinka monen vuoden kuluttua 500 euron talletuksen suuruus ylittää 600 euroa, kun tilin korkokanta on 1,2 %?

96. Kaarina sijoittaa 180 € sijoitusvakuutukseen, joka lupaa vähintään 2,6 %:n vuosikoron sijoitukselle. Seitsemän vuoden kuluttua sijoitus oli kasvanut 16,80 €. Toteutuiko sijoitusvakuutuksen lupaama vuosikorko?

97. Korkeakorkoiselle tilille talletettu rahasumma on kasvanut kymmenessä vuodessa 30 %. Laske tilin korkokanta.

98. Tilille sijoitettiin ensimmäisen vuoden alussa 5000 € ja toisen vuoden alussa 4500 €. Kolmannen vuoden alkaessa tilin saldo oli 9894,85 €. Mikä on tilin korkokanta, kun korko lisättiin pääomaan vuosittain vuoden lopussa ja koroista perittiin vuosittain lähdeveroa 29 %? Tilillä ei kyseisenä aikana ollut muita tapahtumia. [S2003, 8]

99. Maiju tallettaa 200 € tilille, jonka korkokanta on 0,58 %. Kuinka monen vuoden kuluttua tilillä on rahaa vähintään 250 €?

100. Helmi tallettaa 158 € tilille kuudeksi vuodeksi. Kuudennen vuoden lopussa hän nostaa talletuksen korkoineen. Helmi saa verojen vähentämisen jälkeen 171,75 €. Laske tilin
a) nettokorkokanta b) korkokanta. Lähdevero on 28 %.

E3 101. Roope tallettaa 15 € tililleen joka kuukausi 20 vuoden ajan. Tilin korkokanta on 1,50 % ja lähdevero 28 %. Kuinka paljon Roopen tilillä on rahaa 20 vuoden kuluttua?

Diskonttaus

102. Kuinka suuri alkupääoman tulisi olla, jotta sen arvo viiden vuoden kuluttua olisi 10 000 €? Sijoituksen nettokorkokanta on 3,5 %.

E4 103. Pirre tallettaa 20-vuotispäivänään tililleen summan, jonka hän on arvioinut 30 vuoden aikana kasvavan 5000 euroon.
a) Mikä on diskonttaustekijä?
b) Kuinka paljon Pirre tililleen tallettaa, kun tilin nettokorkokanta on 2,3 %?

E5 104. Kalle sijoitti vuonna 2000 ja vuonna 2004 yhtä suuret summat samalle tilille, jonka nettokorkokanta on 1,10 %. Vuonna 2010 Kalle nosti tallettamansa rahat tililtään. Kuinka suuri oli ollut kertatalletus, kun nostaessaan Kalle sai 14 570 €?

105. Lassen leipä Oy osti uuden koneen leipomoonsa. Yritys voi maksaa koneen kahdella eri maksuvaihtoehdolla:
- vaihtoehto 1: kaupantekohetkellä 2500 € ja kahden vuoden kuluttua 2500 €
- vaihtoehto 2: kaupantekohetkellä 1800 €, vuoden kuluttua 1000 € ja kolmen vuoden kuluttua 2200 €.

Korkokanta kummassakin vaihtoehdossa on 5,5 %. Kumpi vaihtoehto on
a) Lassen leipä Oy:n kannalta edullisempi
b) koneen myyjän kannalta edullisempi?

E6 106. Erään kiinteistön kauppahinta voidaan maksaa kahdella eri tavalla: joko maksamalla käteissuoritus 50 000 € ja kahden vuoden kuluttua toinen maksuerä 50 000 € tai maksamalla käteissuoritus a € ja viiden vuoden kuluttua 60 000 €. Kuinka suuri tulee toisen maksuvaihtoehdon käteissuorituksen olla, jotta maksuvaihtoehdot olisivat yhtä edulliset? Korkokanta on kummassakin maksutavassa 6,4 %.

107. Kuinka paljon lukion stipendirahastoon on lahjoitettava rahaa euroina (€), kun tarkoituksena on jakaa lahjoitus korkoineen stipendeinä seuraavasti: tasan vuoden kuluttua lahjoituksesta 200 €, kahden vuoden kuluttua 300 €, kolmen vuoden 400 €, neljän 500 € ja viiden vuoden kuluttua 600 €? Pääomaan lisätään vuosittain 4,5 prosentin korko, ensimmäisen kerran vuoden kuluttua lahjoituksesta. [S2001, 14]

108. Rinja osti uuden polkupyörän. Hän maksoi käteismaksuna 50 € ja tämän jälkeen 30 € kuukaudessa kahdeksan kuukauden ajan kuukausikoron ollessa 0,85 %. Minkä hintainen Rinjan pyörä olisi ollut kaupantekohetkellä, jos hän olisi pystynyt maksamaan koko hinnan heti?

E7 109. Aapo ostaa 2000 euron hintaiset kotiteatterilaitteet osamaksulla. Ostohetkellä hän maksaa 100 euron käsirahan. Loput kauppasummasta Aapo maksaa yhtä suurina maksuerinä joka kuukausi kahden vuoden ajan. Laske yhden maksuerän suuruus, kun osamaksun korkokanta on 4,8 %.

Sekalaisia tehtäviä

110. Kuinka suureksi 1700 €:n talletus kasvaa a) 5 vuodessa b) 12 vuodessa, kun vuosikorko on 1,73 % ja lähdevero 28 %?

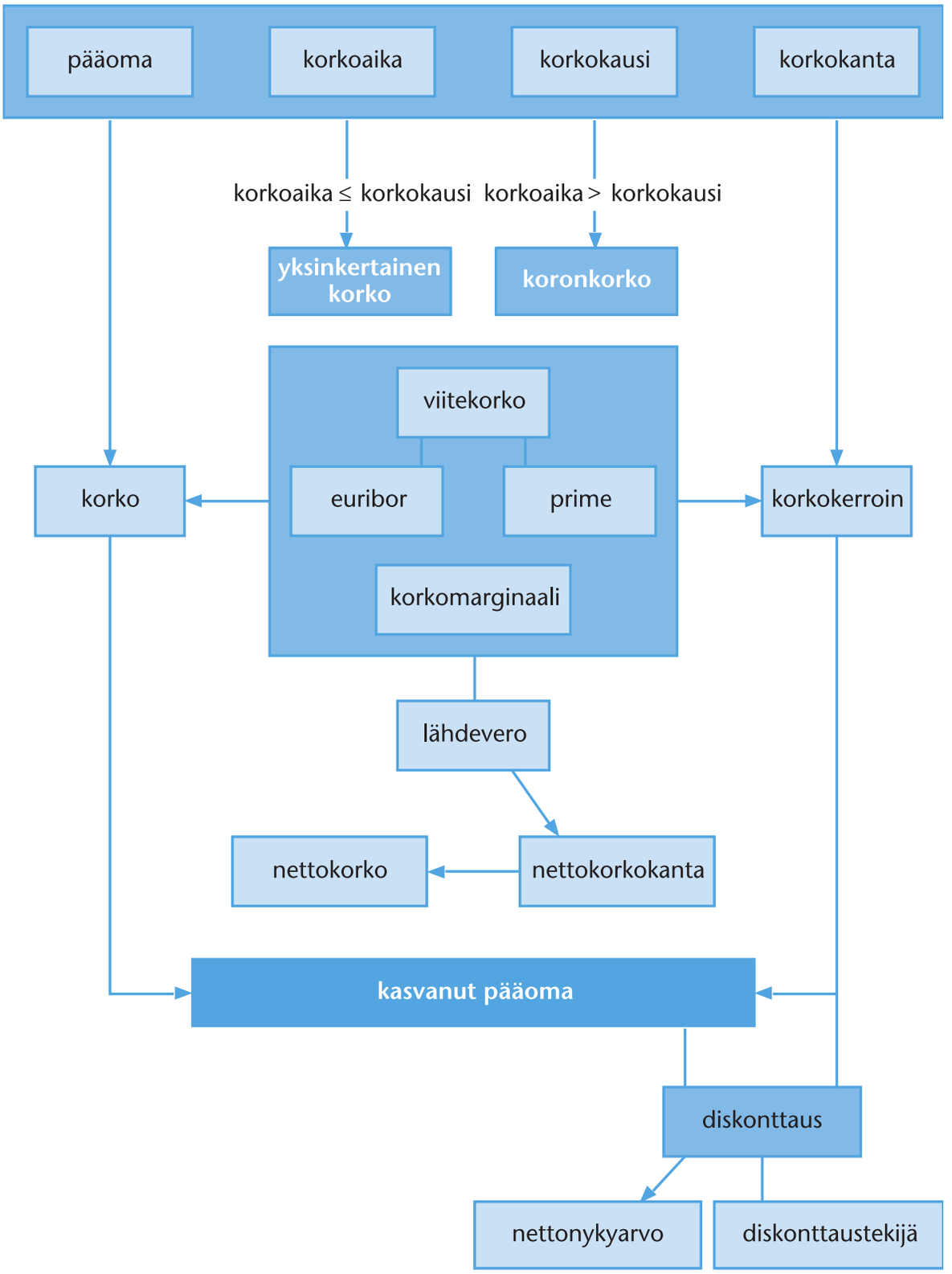
111. Juuso tallettaa 650 € sijoitustilille 9 vuodeksi, jolloin pääoma on kasvanut 150 €. Mikä on tilin a) nettokorkokanta b) korkokanta, kun lähdevero on 28 %?

112. Ernesti sijoittaa rahastoon, jonka vuosituoton arvioidaan olevan 7,5 %. Jos tuotto pysyisi joka vuosi samana, viiden vuoden kuluttua Ernestin sijoituksen arvo olisi 7500 €. Kuinka paljon Ernesti sijoittaa rahastoon?

113. Ulla ja Arttu ostivat molemmat alennusmyynnistä skootterit. Ulla maksoi oston yhteydessä 500 €:n käsirahan ja kahden kuukauden kuluttua 1000 € korkokannan ollessa 3,9 %. Arttu maksoi ostohetkellä 750 € ja kolmen kuukauden kuluttua loput korkokannan ollessa 3,6 %. Kuinka paljon Arttu maksoi toisessa maksuerässä, kun Ullan ja Artun skootterit olivat yhtä edulliset?

114. Henkilö tekee säästösuunnitelman seitsemäksi vuodeksi ja tallettaa vuosittain kunkin vuoden alussa tietyn summan tilille, jolle maksetaan vuotuista korkoa 2,00 prosentin mukaan. Hän haluaa ottaa suunnitelmassaan huomioon inflaation vaikutuksen ja korottaa talletuksensa määrää keskimääräisen inflaatio-odotuksen mukaisesti aina kahdella prosentilla edellisen vuoden talletuksen määrästä. Mikä on säästösumma sen vuoden lopussa, jona seitsemäs talletus on tehty, kun ensimmäinen talletus on K euroa? Laske sovelluksena säästösumma tapauksessa $K = 500$ €. Lähdevero on 29 %. [S2004, 14]

Keskeisiä käsitteitä



4 Sijoittaminen ja rahoitus

4.1 Sijoittaminen

POHDINTA 1 Miten sijoittaisit 10 000 euroa, jos sinulla olisi kolme eri vaihtoehtoa? Perustele sijoitus.

A Korkeakorkoinen pankkitili
- Tilin vuosikorko on 6,5 %.
- Tuotto on varma.

B Sijoitusrahasto
- Rahasto sijoittaa sekä pankkitileille että osakkeisiin.
- Arvioitu vuosituotto on 8,0 %.
- Tuotto on epävarma.

C Rahasampo Oy:n osakkeet
- Osakkeiden arvioitu vuosituotto 12,5 %.
- Tuotto on erittäin epävarma.

Yksityishenkilöllä on rahojen sijoittamiseen monta vaihtoehtoa. Näitä ovat esimerkiksi

- pankkitalletukset
- vakuutukset
- joukkovelkakirjalainat
- osakkeet
- rahastot
- asunnot
- kiinteistöt
- metsä
- taide.

Ennen rahojen sijoittamista on syytä miettiä, mitä tarkoitusta varten sijoituksen tekee. Tämän lisäksi on järkevää pohtia esimerkiksi, kuinka paljon ja miten pitkäksi aikaa rahaa aikoo sijoittaa. Nämä kaikki vaikuttavat olennaisesti sijoitusvaihtoehdon valintaan.

Sijoittamiseen liittyy aina jonkinlainen riski. Tällä tarkoitetaan vaaraa, ettei sijoitus annakaan toivottua tuottoa tai että sijoitetun pääoman arvo laskee. Sijoitus on riskitön vain silloin, kun sijoituksen tuotto on aivan varmasti etukäteen tiedossa.

Eri sijoitusvaihtoehtoihin liittyy erilaisia riskejä. Ennen sijoituksen tekemistä kannattaa selvittää, mitkä ovat sijoituksen mahdolliset riskit. Yleensä ne sijoitusmuodot, joissa riski on suurin, ovat onnistuneina sijoituksina tuottoisimpia. Toisaalta sijoituksen epäonnistuessa tappiot ovat näissä sijoituksissa suurimmat. Vähiten riskiä sisältävät sijoitukset tuottavat useimmiten vähän mutta varmasti.

Sijoittamiseen liittyvää riskiä voi pienentää hajauttamalla sijoitukset useaan eri sijoituskohteeseen. Tämän lisäksi pitkä sijoitusaika yleensä vähentää riskiä.

Sijoitusvaihtoehtoa valitessaan kannattaa siis pohtia seuraavia asioita:

- **sijoitusaika**
  Mitä lyhyempi sijoitusaika on, sitä vakaampia sijoituskohteita kannattaa valita.
- **sijoitettava rahamäärä**
  Onko kerralla sijoitettava suuri summa vai voiko rahaa sijoittaa pieniä summia kuukausittain?
- **riskinottohalu**
  Mitä suurempi sijoituksen riski on, sitä suuremmat ovat yleensä sijoituksen tuotto- ja tappiomahdollisuudet.

Pankkitalletukset

Pankkitalletus on yleensä turvallinen sijoitus. Vaikka pankki tekisi konkurssin, sijoituksen riskit ovat hyvin pienet, sillä talletuksilla on lakiin perustuva talletussuoja 50 000 euroon asti.

Käyttötilien koron määräytymisen periaatteet vaihtelevat pankeittain.

Kun pankkitalletus tehdään sijoitusmielessä, raha talletetaan yleensä korkeakorkoiselle tilille. Näiden tilien korko on hieman suurempi kuin päivittäisten raha-asioiden hoitamisessa käytetyt käyttötilit. Korkeakorkoisilta tileiltä rahaa voi nostaa vain sopimuksen ehtojen mukaisesti. Yleensä rahat talletetaan tilille useammaksi vuodeksi kerrallaan. Tilien korkotuotoista on maksettava lähdeveroa (28 %) aivan kuten muistakin pankkitilien koroista.

Esimerkki 1

Kahden vuoden määräaikaistilin kiinteä vuotuinen korko oli 0,45 %. Sijoitusajan lopussa kertatalletukselle maksetaan vielä 9,5 %:n lisäkorko. Riku sijoittaa tilille 2000 €. Kuinka suuri on korkotuotto sijoitusajan lopussa, kun lähdevero on 28 %?

Ratkaisu

Tilin nettokorkokanta on $0{,}45\ \% \cdot 0{,}72 = 0{,}324\ \% = 0{,}00324$.

Talletuksen suuruus kahden vuoden kuluttua

$$1{,}00324^2 \cdot 2000\ € = 2012{,}980\ldots\ €$$

Koska alkuperäinen talletus oli 2000 €, korkoa on kertynyt

$$2012{,}980\ldots\ € - 2000\ € = 12{,}980\ldots\ € \approx 12{,}98\ €$$

Sijoitusajan lopussa kertatalletukselle maksetaan 9,5 %:n lisäkorko, josta maksetaan myös lähdevero. Tämän lisäkoron nettokorkokanta on

$$9{,}5\ \% \cdot 0{,}72 = 6{,}84\ \% = 0{,}0684$$

Lisäkorko maksetaan alkuperäisestä talletuksesta eli 2000 eurosta, joten lisäkorko on

$$0{,}0684 \cdot 2000\ € = 136{,}80\ €$$

Yhteensä sijoitus tuottaa korkoa

$$12{,}98\ € + 136{,}80\ € = 149{,}78\ €$$

Vastaus

Sijoituksen korkotuotto on 149,78 €.

Vakuutukset

Eläkevakuutuksen tarkoituksena on joko aikaistaa eläkkeelle siirtymistä tai lisätä oman eläkkeen määrää.

Eläkevakuutuksia myyvät vakuutusyhtiöt ja pankkien omistamat henkivakuutusyhtiöt. Eläkevakuutukseen sijoittava tallettaa vakuutukseen rahaa yleensä kuukausittain. Nämä vapaaehtoiset eläkevakuutusmaksut ovat verotuksessa vähennyskelpoisia 5000 euroon saakka vuodessa (2010).

Vakuutukseen sijoitettu raha on yleensä nostettavissa vasta eläke-ehtojen täytyttyä. Eläkkeensaajalta edellytetään esimerkiksi määrättyä ikää. Erikoistilanteissa, kuten pitkään jatkuneessa työkyvyttömyydessä, edellä mainituista ehdoista voidaan poiketa. Vakuutuksen kautta maksettava eläke on veronalaista tuloa. Sitä verotetaan pääomatulojen veroprosentin (28 %) mukaan.

Sijoitusvakuutus on hyvä ja joustava sijoitusmuoto pitkäaikaiseen säästämiseen. Sijoitusvakuutus ei itse asiassa ole edes vakuutus, vaan se koostuu esimerkiksi rahasto-osuuksiin tehdyistä sijoituksista, jotka voi nostaa tietyn määräajan kuluttua. Sijoituksen kohteita voi yleensä vaihtaa maksuttomasti, toisin kuin esimerkiksi suorissa rahastosijoituksissa.

Vakuutukseen voidaan sijoittaa joko pieniä summia säännöllisesti, esimerkiksi kerran kuukaudessa, tai kertasijoituksena suurempi summa. Säännöllinen kuukausisijoittaminen on mahdollista myös keskeyttää.

Useimmista sijoitusvakuutuksista voi myös tehdä nostoja. Nostot ovat verottomia, niin kauan kuin nostot otetaan alkuperäisestä sijoitussummasta. Alkuperäisen sijoitussumman ylittävä osuus on sijoitusvakuutuksen tuottoa, josta maksetaan pääomatuloveroa.

Sijoitusvakuutuksen ottaja voi määritellä edunsaajaksi kenet tahansa, esimerkiksi omat lapset. Pääoman tuotosta peritään aina pääomatulovero, mutta sijoitettu pääoma on lähiomaiselle verovapaata 8500 euroon saakka. Vasta 8500 euron yli menevää pääomaa käsitellään lahjana.

ESIMERKKI 2

Anni sijoittaa sijoitusvakuutukseen aluksi 3000 €, minkä jälkeen hän lisää sijoitustaan 500 € vuosittain. Sijoitusvakuutuksesta maksetaan sijoitetun summan lisäksi hoitokuluja vuosittain 45 €. Laske sijoitusvakuutuksen nettotuotto 5 vuoden kuluttua, kun sijoitusvakuutuksen tuoton arvioidaan olevan 9,5 % vuodessa.

RATKAISU

Tarkastellaan erikseen alkusijoitusta sekä vuosittaisia sijoituksia.

Alkupääoma

Alussa sijoitettu 3000 € kasvaa korkoa vuosittain 9,5 %, joten sijoituksen arvo 5 vuoden kuluttua on

$$1{,}095^5 \cdot 3000\ € = 4722{,}716\ldots\ € \approx 4722{,}72\ €$$

Vuosittaiset sijoitukset

Neljänä seuraavana vuonna vakuutukseen sijoitetaan 500 €.

Sijoitukset tarkastelun lopussa korkoineen

$$\begin{aligned} &1{,}095^4 \cdot 500\ € + 1{,}095^3 \cdot 500\ € + 1{,}095^2 \cdot 500\ € + 1{,}095 \cdot 500\ € \\ &= (1{,}095^4 + 1{,}095^3 + 1{,}095^2 + 1{,}095) \cdot 500\ € \\ &= 2522{,}309\ldots\ € \\ &\approx 2522{,}31\ € \end{aligned}$$

Korkotekijät muodostavat geometrisen summan, joka voitaisiin laskea myös summakaavalla.

Sijoitusvakuutuksen arvo ennen pääomatuloveron vähentämistä on

$$4722{,}72\ € + 2522{,}31\ € = 7245{,}03\ €$$

Sijoitusvakuutukseen sijoitettiin 5 vuoden aikana

$$3000\ € + 4 \cdot 500\ € = 5000\ €$$

Pääomatuloveroa maksetaan sijoitusvakuutuksen tuotosta.

$$7245{,}03\ € - 5000\ € - 225\ € = 2020{,}03\ €$$

Vakuutuksen tuoton kohdalla huomioidaan vuosittain maksetut hoitokulut: $5 \cdot 45\ € = 225\ €$.

Kun tuotosta poistetaan 28 %:n pääomatulovero, nettotuotoksi saadaan

$$0{,}72 \cdot 2020{,}03\ € = 1454{,}4216\ € \approx 1454{,}42\ €$$

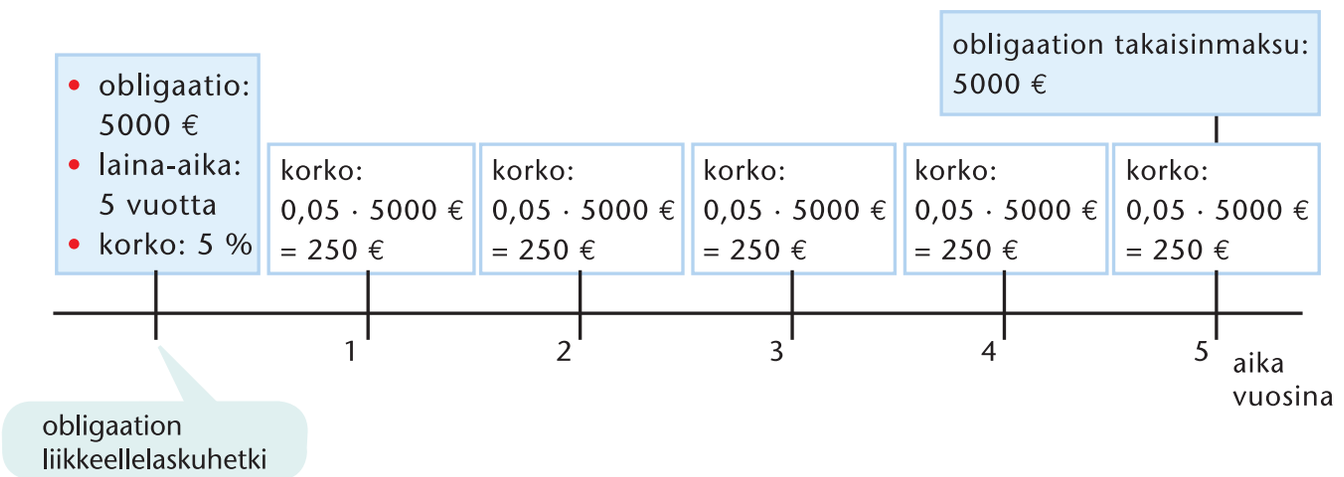
VASTAUS

Nettotuotto on 1454,42 €.

Joukkovelkakirjalaina

Joukkovelkakirjalaina eli **obligaatio** on esimerkiksi valtion, kunnan tai yrityksen liikkeelle laskema laina. Tällaisessa lainassa lainan ottaja (esimerkiksi valtio) lainaa rahaa suurelta joukolta sijoittajia. Joukkovelkakirjalainan ottaminen on yleensä hyvin yksinkertaista: sijoittaja lainaa sovitun summan rahaa sovitulla kiinteällä korolla sovituksi ajaksi.

Lainan ottaja maksaa lainan antajalle korkoa vuosittain. Koroista on maksettava lähdeveroa (28 %) aivan kuten muistakin korkotuotoista. Obligaatioilla on yleensä kiinteä laina-aika, esimerkiksi 5 tai 10 vuotta.



Obligaatio on arvopaperi (kuten osakkeet) ja sen voi myydä ennen laina-ajan loppumista. Tällöin mahdollisesta myyntivoitosta on maksettava pääomatuloveroa (28 %).

Joukkovelkakirjalainan voi merkitä itselleen liikkeellelaskupäivänä sen **merkintähinnalla** eli **nimellisarvolla**. Liikkeellelaskupäivän jälkeen joukkovelkakirjalainan voi ostaa emissiokurssin mukaan määräytyvällä hinnalla. **Emissiokurssi** kertoo, kuinka monta prosenttia alkuperäisestä merkintähinnasta sijoittaja joutuu joukkovelkakirjalainasta maksamaan. Jos emissiokurssi on alle 100, lainasta maksetaan nimellisarvoa pienempi hinta. Tämän lisäksi on maksettava liikkeellelaskupäivän ja merkintäpäivän välinen korko.

ESIMERKKI 3

Pankki laski liikkeelle viiden vuoden joukkovelkakirjalainan, jonka korkokanta oli 3,2 %. Hannu merkitsi 5000 €:n lainan 50 päivää lainan liikkeellelaskun jälkeen.

a) Kuinka paljon Hannu maksoi joukkovelkakirjastaan, kun emissiokurssi oli 95 %?

b) Kuinka paljon Hannu sai korkotuottoa koko sijoitusajalta?

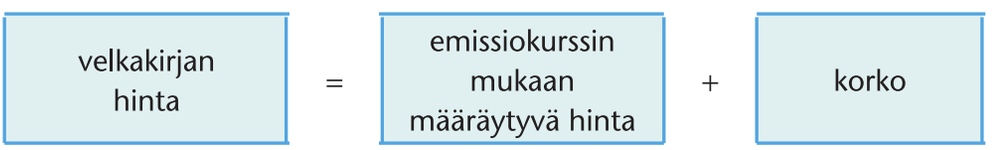
RATKAISU

a) Joukkovelkakirjan merkintähinta oli $0{,}95 \cdot 5000\ € = 4750\ €$.

Hannu joutuu maksamaan liikkeellelaskupäivän ja merkintäpäivän välisen koron:

$$5000\ € \cdot 0{,}032 \cdot \frac{50}{365} = 21{,}917\ldots\ € \approx 21{,}92\ €$$

Velkakirjan hinta oli $4750\ € + 21{,}92\ € = 4771{,}92\ €$.



b) Korkoa maksetaan vuosittain 3,2 % eli $0{,}032 \cdot 5000\ € = 160\ €$.

Joukkovelkakirjalainan oston yhteydessä Hannu maksoi ensimmäisen 50 päivän koron eli 21,92 €, joten ensimmäisenä vuonna korkotuottoa tuli

$$160\ € - 21{,}92\ € = 138{,}08\ €$$

Hannu saa korkoa yhteensä neljältä kokonaiselta vuodelta ja 315 päivältä

$$4 \cdot 160\ € + 138{,}08\ € = 778{,}08\ €$$

Tästä on vielä maksettava 28 %:n lähdevero, joten todellinen korkotuotto on

$$0{,}72 \cdot 778{,}08\ € = 560{,}2176\ € \approx 560{,}22\ €$$

VASTAUS

a) 4771,92 € b) 560,22 €

Osakkeet

Osakkeet ovat osakeyhtiömuotoisille yrityksille yksi tapa hankkia lisää varoja esimerkiksi investointeihin. Osake on nimellisarvon suuruinen laskennallinen osuus osakeyhtiöstä. Yksityiset henkilöt, yritykset ja yhteisöt voivat ostaa osakkeita ja näin saada osakkuuden osakeyhtiöstä.

Osa osakeyhtiöistä on listautunut arvopaperipörssiin, jolloin näiden yhtiöiden osakkeilla käydään kauppaa pörssissä. Pörssiyhtiöiden osakkeita voi ostaa osakevälittäjien avulla. Eri osakkeiden hinnat näkyvät osakekurssien pörssilistoista.

Muutos
Päivän päätöskurssin muutos verrattuna edellisen päivän päätöskurssiin.

Viim
Viimeisin kauppahinta = **päätöskurssi**

	Muutos %	Muutos €	Viim
Alma Media	–0,14	–0,01	7,39
Comptel	–1,27	–0,01	0,78
Elisa	+0,53	+0,08	15,25
Finnair	+0,27	+0,01	3,76
Metso	+3,10	+0,71	23,58
Nokia	+1,77	+0,17	9,78
Nordea	+1,10	+0,08	6,91
Stockmann A	–1,00	–0,24	23,76
Stockmann B	+0,05	+0,01	21,80
UPM-Kymmene	+0,58	+0,04	7,79
Wärtsilä	+1,41	+0,46	33,16

Lähde: Helsingin sanomat 18.2.2010

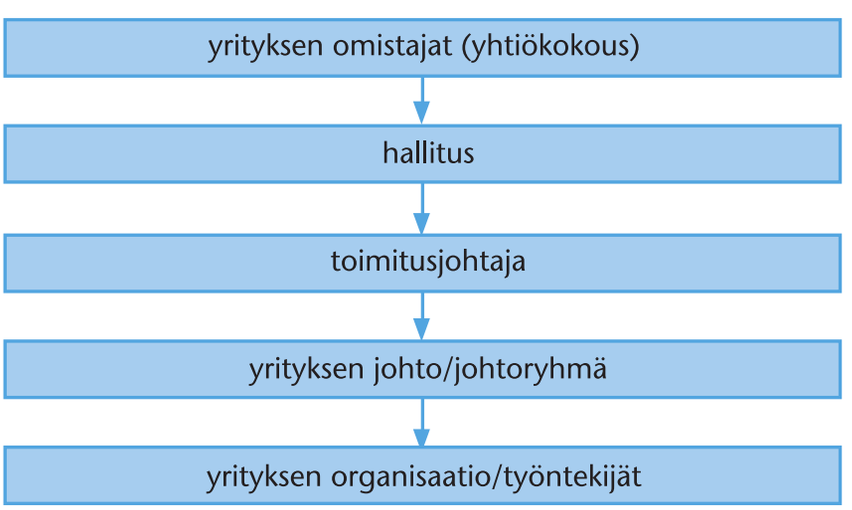
Kurssien määräämän osto- tai myyntihinnan lisäksi osakesijoittamisesta aiheutuu kuluja, joiden suuruus riippuu osakevälittäjästä. Yleensä kulut ovat erilaisia välityspalkkioita.

Osakkeiden tuotto koostuu osakkeen osinkotuloista ja mahdollisista myyntivoitoista. Myyntivoitosta on maksettava pääomaveroa (28 %).

Osinko on yhtiön osakkailleen jakama voitto-osuus. Suomessa yhtiöt jakavat osinkoa yleensä vuosittain tilinpäätöksen valmistuttua. Osinkoon ovat oikeutettuja ne, jotka omistavat osakkeet osingosta päättävän yhtiökokouspäivän päätteeksi. Yhtiökokousta seuraavaa pörssipäivää nimitetään **osingon irtoamispäiväksi**, jolloin ostetulla osakkeella ei ole enää osinko-oikeutta tässä osingonjaossa. Yhtiöstä saadusta osingosta 70 % on veronalaista pääomatuloa ja 30 % verovapaata tuloa.

Osakkeenomistajat kokoontuvat vuosittain yhteen tai useampaan **yhtiökokoukseen**. Kokouksessa päätetään tärkeimmistä yhtiötä koskevista asioista. Osakkeenomistaja käyttää päätösvaltaa äänestämällä; mitä enemmän osakkeita omistaa, sitä enemmän äänivaltaa osakkaalla on. Monilla yhtiöillä on kahta tai useampaa erilaista osaketta. Osakkeiden ero on tavallisesti juuri äänivallassa. Esimerkiksi yhtiön A-osakkeen äänimäärä saattaa olla kaksinkertainen saman yhtiön B-osakkeeseen verrattuna.

Yhtiön omistajat, osakkeenomistajat, valitsevat vuotuisessa yhtiökokouksessa **hallituksen**, jonka tehtävänä on yrityksen edun valvominen ja edistäminen. **Toimitusjohtaja** hoitaa yhtiön toimintaa ja juoksevaa hallintoa hallituksen antamien ohjeiden ja määräysten mukaisesti. Toimitusjohtajalla on yrityksessä apunaan normaalisti **johtoryhmä**, jossa on eri toimintojen johtamiseen erikoistuneita henkilöitä. Tyypillisiä johtoryhmän jäseniä toimitusjohtajan lisäksi ovat mm. talousjohtaja, myyntijohtaja, tuotantojohtaja, henkilöstöjohtaja ja markkinointijohtaja.



Osakeyhtiön tärkein tehtävä osakkeenomistajan kannalta on tehdä voittoa. Yhtiökokous voi osingon maksamisen sijaan päättää omien osakkeidensa ostamisesta. Kun yhtiö on ostanut markkinoilta omia osakkeitaan, ne voidaan esimerkiksi mitätöidä. Osakkaan kannalta tästä prosessista on se etu, että jäljelle jäävien osakkeiden arvo kasvaa. Näin osakkeenomistaja saa hyödyn kurssinousun muodossa, jos hän realisoi omistuksensa myymällä osakkeitaan pörssissä.

Monet yhtiöt kannustavat avainhenkilöitään **optioiden** avulla. Optio-oikeuden saaneilla henkilöillä on oikeus ostaa yhtiön osakkeita ennalta määrättyyn hintaan ennalta sovittuna ajankohtana. Optioiden avulla yritysjohto sitoutetaan tehokkaasti yhtiön toimintaan. Yhtiön toiminnan parantaminen ja tuloksen kasvattaminen lisäävät heidän palkkaansa: osakekurssin noustessa heidän optioidensa arvo kasvaa.

Osakesijoittamiseen liittyy aina riskejä. Osakkeiden arvo voi pudota ostohintaa alhaisemmaksi, jolloin sijoittaja kärsii voiton sijasta rahallisia tappioita. Jos yhtiön toiminta on pitkään tappiollista, yhtiö voi ajautua vaikeuksiin ja mennä konkurssiin. Tällöin yhtiön osakkeet menettävät arvonsa ja sijoittaja menettää rahansa.

Huolimatta riskeistä, jotka liittyvät osakesijoittamiseen, osakkeita pidetään tuottoisana sijoituskohteena. Osakesijoittaminen vaatii kuitenkin perehtymistä osakemarkkinoihin sekä tutustumista niiden yhtiöiden toimintaan, joiden osakkeita aikoo hankkia.

OMX-indeksi (Helsinki) kertoo, miten osakkeiden arvo on kehittynyt Helsingin pörssissä.

ESIMERKKI 4

Sijoittaja osti vuoden 2009 helmikuussa 1000 kappaletta Marimekon osakkeita. Osakkeen hinta 23.2.2009 oli 8,00 €. Loppukeväästä yhtiö jakoi osinkoa 0,55 €/osake. Sijoittaja myi osakkeet 18.2.2010, jolloin osakkeen hinta oli 10,50 €. Osto ja myyntitoimeksiannoista sijoittaja joutui maksamaan välityspalkkiota 0,15 % kauppasummasta. Laske sijoittajan osakkeista saama nettovoitto. Osinkotuloista 30 % on verovapaata.

RATKAISU

Ostohetki

Osakkeiden hinta	$1000 \cdot 8{,}00\ € = 8000\ €$
Välityspalkkio	$0{,}0015 \cdot 8000\ € = 12\ €$

Osinko

Osinkotulo	$0{,}55\ € \cdot 1000 = 550\ €$

Osinkotuloista 30 % on verovapaata, joten verotettava osuus on

$$0{,}7 \cdot 550\ € = 385\ €$$

ja verovapaa osuus $0{,}3 \cdot 550\ € = 165\ €$. Osinkotuloja verotetaan pääomatuloveroprosentin (28 %) mukaan, joten netto-osinko on

$$0{,}72 \cdot 385\ € + 165\ € = 442{,}20\ €$$

Myyntihetki

Myyntitulo	$1000 \cdot 10{,}50\ € = 10\,500\ €$
Välityspalkkio	$0{,}0015 \cdot 10\,500\ € = 15{,}75\ €$

Osakkeiden myynnistä saadaan tuloa $10\,500\ € - 8000\ € = 2500\ €$. Ennen verojen maksua tästä summasta vähennetään kulut (välityspalkkiot).

Nettotulo on

$$0{,}72 \cdot (2500\ € - 12\ € - 15{,}75\ €) = 0{,}72 \cdot 2472{,}25\ € = 1780{,}02\ €$$

Nettovoitto koostuu netto-osingosta ja myynnistä saatavasta nettotulosta.

$$442{,}20\ € + 1780{,}02\ € = 2222{,}22\ €$$

VASTAUS

2222,22 €

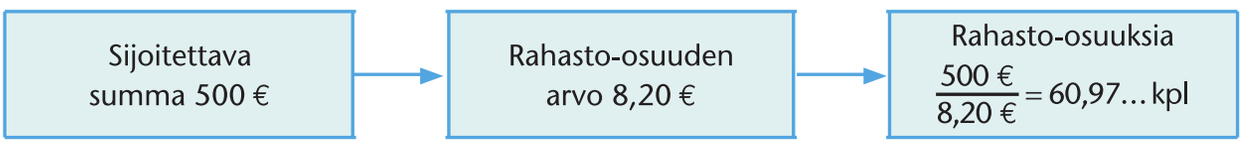
Sijoitusrahastot

Sijoitusrahastojen toimintaperiaate on hyvin yksinkertainen: rahastoyhtiö kerää yksityishenkilöiltä ja yhteisöiltä varoja, jotka se sijoittaa useisiin eri arvopapereihin. Sijoitusrahastoja voidaan ajatella olevan kolmenlaisia: **osakerahastoja**, **korkorahastoja** ja **yhdistelmärahastoja**.

- Osakerahasto sijoittaa pääasiassa osakkeisiin.
- Korkorahasto sijoittaa korkoa tuottaviin kohteisiin.
- Yhdistelmärahasto sijoittaa sekä osakkeisiin että korkoa tuottaviin kohteisiin.

Rahastojen tuotto muodostuu myyntivoitosta ja rahastojen maksamasta voitto-osuudesta. Molemmista on maksettava pääomatuloveroa (28 %). Osa rahastoista ei maksa lainkaan voitto-osuuksia vaan sijoittaa ne edelleen uusiin osakkeisiin (niin sanotut kasvurahastot).

Kun sijoitetaan rahastoon, ei suoranaisesti osteta osakkeita, joten sijoittaja ei tarvitse esimerkiksi arvo-osuustiliä, joka yleensä täytyy olla osakkeen omistamista varten. Rahastosijoittamisessa ostetaan **osuuksia**. Yhden osuuden arvo määräytyy rahaston sisältämien osakkeiden kurssien mukaan: mitä korkeammalla rahaston osakkeiden arvo on, sitä enemmän yksi rahaston osuus maksaa. Jos rahasto on sijoittanut osakkeisiin, joiden kurssit ovat laskeneet, myös rahasto-osuuksien arvo on alempi. Näin sijoittaja saa samalla rahalla enemmän osuuksia.



Rahastosijoittamisessa on useita etuja suoraan osakesijoittamiseen verrattuna. Sijoittaja voi lähteä säästämään hyvinkin pienillä summilla: jo muutaman kymmenen euron kuukausisijoituksilla voi hankkia rahasto-osuuksia. Rahastot ovat myös hyvin joustavia, koska sijoittamisen voi keskeyttää tai lopettaa milloin tahansa. Rahasto-osuudet voi halutessaan myös myydä milloin tahansa, jolloin niistä saatavat rahat maksetaan tilille muutaman päivän kuluessa myyntitoimeksiannosta.

Rahastoon sijoittavan ei itse tarvitse seurata osakkeiden kursseja eikä hänen tarvitse tuntea yhtiöitä, joiden osakkeita rahasto hankkii. Rahastolla on salkunhoitajia, joiden tehtäväksi tämä jää. Rahasto hajauttaa varat useisiin osakkeisiin, joten se on riskittömämpää kuin osakkeiden hankkiminen. Vaikka joidenkin osakkeiden kurssit laskisivatkin, osa luultavasti säilyttää arvonsa tai nousee.

Rahastoihin sijoittaminen on kannattavinta ja riskittömintä yleensä silloin, kun sijoitetaan pitkällä aikavälillä tasasummia säännöllisesti. Kun rahaston arvo laskee, sijoittaja saa ostettua useampia osuuksia rahastosta. Rahaston arvon noustessa sijoittaja saa samalla rahamäärällä vähemmän osuuksia.

Erilaisten rahastojen arvoja julkaistaan omina listoinaan. Seuraaviin taulukoihin on koottu muutamien rahastojen arvot ja suhteelliset muutokset kolmen kuukauden ja vuoden aikana. Rahaston nimen perässä oleva K viittaa kasvurahastoon ja T tuottorahastoon.

Osakerahastoja

Rahasto	Arvo (€)	Muutos 3 kk %	Muutos 12 kk %
Nordea Pro Suomi K	49,067	+3,94	+61,09
OP Suomi Arvo	135,890	+2,57	+53,12
Handelsbanken India	12,340	+7,30	+89,85
Sampo Arvo Euro Value T	27,001	–6,72	+34,32

19.2.2010 Kauppalehti

Yhdistelmärahastoja

Rahasto	Arvo (€)	Muutos 3 kk %	Muutos 12 kk %
Aktia Solida	139,180	+1,04	+8,51
FIM Piano	13,720	+4,02	+12,00
Tapiola Maailma20	11,102	+4,54	+13,62
Ålandsbanken Europe Active	21,5403	+5,64	+34,29

19.2.2010 Kauppalehti

Seuraavaan taulukkoon on koottu lyhyesti muutamien sijoitusvaihtoehtojen etuja ja haittoja. Tässä yhteydessä on kuitenkin muistettava, että etujen ja haittojen lukumäärä ei kerro mitään esimerkiksi sijoituksen kannattavuudesta. Jokaisen sijoittajan on aina pohdittava sijoituksen kannattavuus sekä etujen ja haittojen painoarvo omalla kohdallaan.

Sijoituskohde	Edut	Haitat
Pankkitalletus (korkeakorkoinen tili)	• sisältää pääomaturvan • ei yleensä muita kuluja (ellei tiliä lopeteta ennenaikaisesti) • varma tuotto	• tuotto yleensä pieni
Eläkevakuutus	• sisältää pääomaturvan • vakuutusmaksut vähennyskelpoisia verotuksessa	• sijoitettu raha yleensä nostettavissa vasta eläkeiässä
Sijoitusvakuutus	• sisältää yleensä pääomaturvan • pääomatulovero maksetaan vasta sijoituksen loputtua	• tuotto yleensä melko pieni
Joukkovelka-kirjalaina	• sisältää pääomaturvan (nimellisarvosta) • mahdollisuus saada korkotuoton lisäksi myyntivoittoa • velkakirjan voi myydä ennen laina-ajan päättymistä	• sijoitus saattaa kääntyä tappiolliseksi • tuotto melko pieni
Osakkeet	• mahdollisuus suureen tuottoon • myyntivoiton lisäksi mahdollisuus saada osinkoja vuosittain	• sijoituksen riskit saattavat olla suuret • ei pääomaturvaa
Rahastot	• mahdollisuus hajauttaa sijoituksiaan ja pienentää riskiä	• ei pääomaturvaa

Tehtäviä

E1 115. Minna sijoitti kolmen vuoden määräaikaistilille 2500 €. Tilin vuotuinen korko oli 0,65 % ja sijoituksen lopussa maksettava lisäkorko 8,7 %. Kuinka suuri on korkotuotto prosentteina sijoitusajan lopussa, kun lähdevero on 28 %?

116. Simo talletti viiden vuoden määräaikaistilille 5000 €. Talletukselle maksettiin 0,44 % vuosikoron lisäksi lopuksi lisäkorko. Kuinka suuri oli lisäkorko, kun Simo nosti tililtään viiden vuoden kuluttua 5640 €? Lähdeveroa ei tarvitse huomioida.

E2 117. Iiro sijoittaa sijoitusvakuutukseen ensimmäisenä vuonna 2000 € ja seuraavina vuosina vuosittain 1000 €. Vakuutuksesta maksetaan sijoitettavan summan lisäksi hoitokuluja 10 € vuodessa. Sijoitusvakuutuksen keskimääräinen vuosituotto on 12 %. Laske sijoitusvakuutuksen nettotuotto kuuden vuoden kuluttua.

118. Juuli ja Reima sijoittivat kumpikin 10 000 € kolmeksi vuodeksi. Juuli sijoitti korkeakorkoiselle pankkitilille, jonka vuosikorko oli 0,68 % ja lopuksi maksettava lisäkorko 12,5 %. Reima sijoitti sijoitusvakuutukseen, jonka arvioitu vuosituotto oli 5,5 %. Kumpi teki paremman sijoituksen? Oletetaan, että kummankaan sijoituksista ei mene muita kuluja kuin verot 28 %.

119. Henkilö otti säästövakuutuksen vuoden 2000 alussa. Laaditun sijoitussuunnitelman mukaisesti hän sijoittaa joka kuukauden alussa 60 € kahdeksan vuoden ajan. Jokaisen sijoituksen yhteydessä peritään vakuutusmaksupalkkiota 2 % sijoitettavasta summasta sekä hoitokuluina 1,35 €. Säästövakuutuksen odotetaan tuottavan samoin kuin vastaava talletus, jonka vuotuinen korko on 4,4 %. Arvioi tuotto-odotuksen mukaisen säästösumman suurus vakuutuskauden päättyessä. Mikä on vakuutuksen puhdas tuotto, kun tuotosta peritään 29 % pääomatuloveroa? [S2002, 14]

E3 120. Piia osti 3500 € joukkovelkakirjalainan, jonka korko oli 3,24 %.
a) Kuinka paljon Piia joutuu oston yhteydessä maksamaan korkoa, kun Piia osti lainan 63 päivää merkintäpäivän jälkeen?
b) Velkakirjan emissiokurssi ostopäivänä oli 105 %. Mikä oli velkakirjan kokonaishinta?
c) Kuinka paljon Piia sai korkotuottoa koko sijoitusajalta, kun kyseessä oli viiden vuoden joukkovelkakirjalaina? Pääomatulovero on 28 %.

121. Kalle ostaa 7000 euron arvoisen kymmenen vuoden valtion obligaation 110 % emissiokurssilla 120 päivää lainan liikkeellelaskun jälkeen. Obligaation korkokanta on 4,5 %.
a) Kuinka paljon Kalle maksoi obligaatiostaan?
b) Kuinka paljon Kalle sai korkotuottoa koko sijoitusajalta? Pääomatulovero on 28 %.

122. Erään obligaation vuotuinen korko on 5 %. Maksetusta korosta peritään 28 %:n lähdevero.
1° Mikä on obligaation todellinen korko?
2° Mikä obligaation vuotuisen koron tulisi olla, jotta todellinen korko olisi 5 %? [K1997, 4a]

E4 123. Peetu osti 1600 kappaletta osakkeita hintaan 12,80 €/kpl. Ostamisen jälkeen yhtiö jakoi osinkoa 0,85 €/osake. Peetu myi osakkeet myöhemmin hintaan 15,10 €/kpl. Osto- ja myyntitapahtumasta Peetu maksoi välityspalkkiota 0,20 % kauppasummasta. Laske Peetun saama nettovoitto. Osinkotuloista 30 % on verovapaata.

124. Oona hankkii kolmen eri pörssiyhtiön osakkeita. Tutki, miten Oonan osakesalkun arvo muuttui kahden vuoden aikana.

Osake	Hankintahinta	Arvo tarkastelun lopussa	Osakkeiden määrä
A	11,67 €	12,54 €	90
B	17,50 €	14,25 €	25
C	12,67 €	25,10 €	10

125. Jaakko sijoittaa joka kuukausi saman summan osakerahastoon. Tammikuussa hän sai sijoittamallaan summalla 115 rahastoosuutta mutta helmikuussa vain 94 osuutta. Kuinka monta prosenttia rahaston arvo oli noussut?

126. Kroisos sijoitti rahastoon 4500 €. Hän sai summalla 80 rahastoosuutta. Rahaston arvo nousi kuukauden aikana 7,4 %. Kroisos halusi ostaa samasta rahastosta yhtä suurella summalla kuin edellisellä kerralla. Kuinka monta osuutta hän sai?

127. Sinulla on käytössä kuvitteelliset 10 000 €, jotka sinun täytyy sijoittaa osakkeisiin. Etsi Helsingin Pörssin sivuilta pörssiyhtiöiden osaketiedot ja sijoita rahasi vähintään kolmeen eri osakkeeseen. Tarkista osakkeiden pörssikurssit viikoittain ja tutki, tekisitkö voittoa vai tappiota ja kuinka paljon, jos myisit osakkeet. Jatka tarkastelua vähintään kolmen viikon ajan.

128. Piensijoittaja osti vuoden alussa erään yhtiön osakkeita. Osake menetti kuitenkin lyhyessä ajassa viidenneksen vuoden alun arvostaan. Tämän jälkeen osakkeen kurssi kääntyi hitaaseen nousuun ja nousi vuoden loppuun mennessä alimmalta tasoltaan 7,0 %.
   a) Kuinka monta prosenttia osakkeiden arvo oli muuttunut vuoden alusta vuoden loppuun mennessä?
   b) Mihin hintaan piensijoittaja oli osakkeet ostanut, kun hän myi ne vuoden lopussa ja laski menettäneensä 900 €?
   c) Kuinka monta prosenttia osakekurssin olisi tullut edelleen nousta, jotta se olisi saavuttanut alkuperäisen tasonsa? Pörssin välityspalkkiota tms. ei laskussa oteta huomioon. [K2003, 14]

Sekalaisia tehtäviä

129. Silja tallettaa korkeakorkoiselle tilille kahdeksi vuodeksi tietyn summan rahaa. Tililtä maksetaan vuosikoron 2,4 % lisäksi kertakorko 4,5 % talletusajan päättyessä. Koroista on maksettava 28 %:n lähdevero. Mikä oli talletussumma, kun Silja saa nostaessa 1707,61 €?

130. Kuinka suuren voiton tekee henkilö, joka sijoittaa vakuutukseen 15 vuoden ajan kerran vuodessa 1500 €, kun sijoituksen keskimääräiseksi vuosituotoksi arvioidaan 8,0 %? Vakuutuksessa veron (28 %) osuutta ei vähennetä vuosittain korosta vaan säästöajan päättyessä.

131. Kun obligaatio ostettiin kaksi kuukautta lainan liikkeellelaskun jälkeen, sen hinta oli 9250,83 €. Obligaation emissiokurssi ostohetkellä oli 108 % ja obligaation vuosikorko 5,0 %. Mikä oli obligaation nimellisarvo liikkeellelaskupäivänä?

132. Erään rahaston kurssi kehittyi viiden kuukauden aikana seuraavasti:

Kuukausi	Tammikuu	Helmikuu	Maaliskuu	Huhtikuu	Toukokuu
osuuden arvo (€)	4,21	3,20	4,10	4,14	4,18

Perttu sijoittaa neljänä ensimmäisenä kuukautena 1500 € tähän rahastoon. Onko hän toukokuussa voitolla vai tappiolla sijoituksissaan?

133. Alma osti 1500 kappaletta osakkeita kurssilla 7,89 €. Hän myi osakkeet 2,56 € paremmalla kurssilla. Alma joutui maksamaan osto- ja myyntitoimeksiannosta 0,75 % välityspalkkiota
   a) Kuinka paljon Alma maksaa yhteensä osakkeita ostaessaan?
   b) Laske Alman saama nettovoitto.

4.2 Erilaisia lainoja

POHDINTA 1

Saara hakee pankista 100 000 €:n suuruista asuntolainaa 8 vuoden maksuajalla. Hän saa kolme erilaista lainatarjousta, joissa kaikissa korko on aluksi 3,5 %.

Tarjous A (tasalyhennys)

- Lainaa lyhennetään joka maksukerta 1041,67 €.
- Maksuerät ovat ensin suuria ja lopuksi pieniä.

maksuerä	=	lyhennys 1041,67 €	+	jäljellä olevan lainan korko

- Ensimmäinen maksuerä on 1333,34 € ja viimeinen maksuerä 1044,71 €.

Tarjous B (tasaerä)

- Maksuerän suuruus on aina 1195,81 €.
- Jos lainan korko nousee, laina-aika pitenee. Maksuerän suuruus säilyy samana.

Tarjous C (annuiteetti)

- Maksuerän suuruus on alussa 1191,81 €.
- Jos lainan korko nousee, maksuerän suuruus nousee. Laina-aika säilyy samana.

- Mikä tarjouksista Saaran kannattaisi mielestäsi hyväksyä ja miksi?
- Mikä lainatarjouksista on mielestäsi kaikkein huonoin? Miksi?
- Millaisiin tilanteisiin lainatarjoukset mielestäsi sopivat?

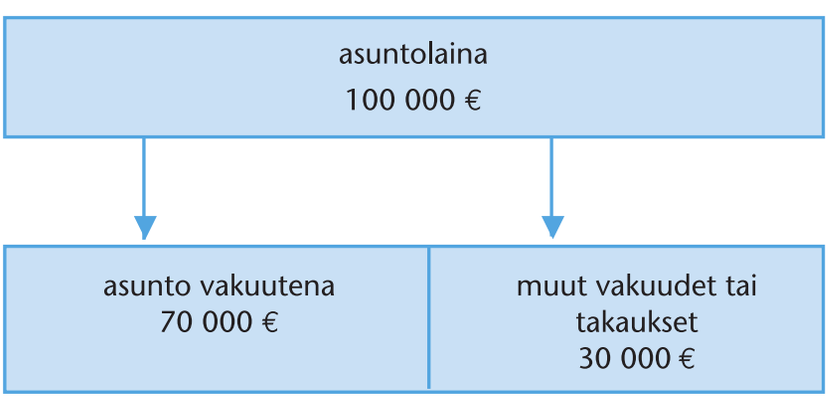
Suurin osa ihmisistä tarvitsee lainaa jossain vaiheessa elämäänsä. Se voi olla opintolainaa opintojen rahoittamiseen, autolainaa auton ostamiseen, asuntolainaa asunnon hankintaan tai remonttilainaa asunnon remontointiin. Oli lainan käyttökohde mikä tahansa, jokaista lainanottoa kannattaa miettiä tarkasti.

Lainaa otettaessa pankki vaatii yleensä lainalle vakuuksia tai takauksia. Niillä pankki haluaa varmistaa, että se myös saa lainaamansa rahat takaisin. Esimerkiksi asuntolainaa otettaessa pankit hyväksyvät yleensä noin 50–70 % asunnon arvosta lainan vakuudeksi. Tässä vakuusosuudessa on aina hieman neuvotteluvaraa riippuen esimerkiksi asunnon kunnosta, iästä ja asumismuodosta (omakotitalo, rivitalo, kerrostalo).

Loppuun lainasummaan tarvitaan esimerkiksi henkilötakaus tai muita vakuuksia. Muiksi vakuuksiksi kelpaavat esimerkiksi kesämökki, osakkeet, metsä tai tontti. Vakuudeksi ei puolestaan yleensä kelpaa esimerkiksi auto tai vene.

Henkilötakauksia pankit hyväksyvät yleensä vain pienille summille. Tämä tarkoittaa sitä, että pankin kannalta maksukykyinen henkilö lupaa allekirjoituksellaan maksaa takaamansa summan pankille, jos lainan ottaja ei lainaa pysty maksamaan.

Tarkastellaan esimerkiksi 100 000 euron asuntolainaa. Pankki hyväksyy asunnon arvosta 70 000 euroa vakuudeksi. Lopulle lainasummalle eli 30 000 eurolle on esitettävä muita vakuuksia tai saatava henkilötakaus.



Kun rahaa lainataan, lainatulle pääomalle maksetaan korkoa. Lainan korkokanta vaikuttaa takaisin maksettavaan rahamäärään sitä enemmän, mitä suuremmasta ja pitkäkestoisemmasta lainasta on kysymys. Mitä nopeammin lainan pystyy maksamaan takaisin, sitä vähemmän korkoja joutuu pankille maksamaan.

Lainan takaisinmaksuaikataulua suunniteltaessa on huomioitava kuukausittaiset tulot. Rahaa on riitettävä myös muuhun elämiseen, joten lainan takaisinmaksusta aiheutuvat kuukausittaiset kustannukset eivät saa olla kohtuuttoman suuria. Pitkien lainojen kohdalla on syytä huomioida lisäksi mahdolliset muutokset lainan korkokannassa tai omassa maksukyvyssä.

Lainan korkokannan nousu voi joko nostaa kuukausittaista maksuerää tai pidentää laina-aikaa. Silloin kun kyseessä on suuri laina, nämä muutokset saattavat yllättää. Oma maksukyky voi puolestaan äkillisesti heiketä esimerkiksi työttömyyden tai sairauden johdosta.

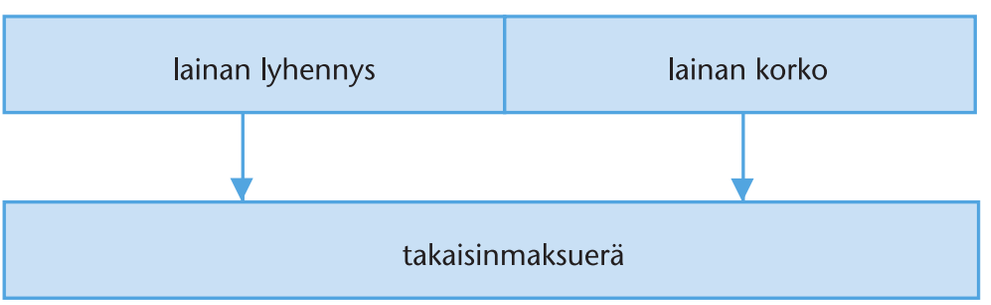
Lainan ottamisessa huomioitavia seikkoja:

- Kuinka suuri laina on?
- Mihin korkokantaan laina on sidottu? Kuinka herkästi lainan korko voi muuttua?
- Kuinka pitkäksi aikaa laina otetaan?
- Kuinka paljon lainaa pystyy kuukaudessa maksamaan takaisin?
- Miten muutokset esimerkiksi korkokannassa huomioidaan?

Pankeilla on tarjottavina muutamia erilaisia lainatyyppejä, joissa lainan takaisinmaksu ja korkokantojen muutokset huomioidaan hieman eri tavalla. Tässä luvussa käsitellään yleisimmät lainatyypit:

- tasalyhennyslaina
- tasaerälaina
- annuiteettilaina.

Lainan takaisinmaksuerä koostuu kahdesta osasta: lainan lyhennyksestä ja lainan korosta. Näiden osuus takaisinmaksuerien kesken voi vaihdella.



Tasalyhennyslaina

Tasalyhennyslaina on laina, jossa kaikki lyhennykset ovat samansuuruisia. Takaisinmaksuerässä oleva koron osuus riippuu jäljellä olevasta lainasummasta. Tasalyhennyslainassa koron osuus takaisinmaksuerästä on aluksi suuri. Kun lainasumma pienenee, myös maksettava korko ja näin myös lainan takaisinmaksuerä pienenee.

Tarkastellaan esimerkiksi 120 000 euron lainaa 3,5 %:n korolla. Jos laina maksetaan takaisin 8 vuodessa eli 96 kuukaudessa, lyhennyksen suuruus jokaisessa maksuerässä on

$$\frac{120000\,€}{96} = 1250\,€$$

	Lyhennys (€)	Korko (€)	Takaisinmaksuerän suuruus (€)	Lainaa jäljellä lyhennyksen jälkeen (€)
1.	1250	$120000 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{1}{12} = 350$	1250 + 350 = 1600,00	120 000 – 1250 = 118 750
2.	1250	$118750 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{1}{12} \approx 346{,}35$	1250 + 346,35 = 1596,35	118 750 – 1250 = 117 500
3.	1250	$117500 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{1}{12} \approx 342{,}71$	1250 + 342,71 = 1592,71	117 500 – 1250 = 116 250
4.	1250	$116250 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{1}{12} \approx 339{,}06$	1250 + 339,06 = 1589,06	116 250 – 1250 = 115 000
5.	1250	$115000 \cdot 0{,}035 \cdot \frac{1}{12} \approx 335{,}42$	1250 + 335,42 = 1585,42	115 000 – 1250 = 113 750

Kaikki lainanlyhennykset ovat yhtä suuria.

Kuukausikorko lasketaan aina jäljellä olevasta lainamäärästä.

Korko ja takaisinmaksuerä pienenevät koko ajan.

Jäljelle jäävän lainan määrä pienenee aina lyhennyksen verran.

Tasalyhennyslaina on sopiva lainatyyppi, jos pystyy aluksi maksamaan hieman suurempia maksueriä. Yleensä tämä ei kuitenkaan ole monen lainanottajan kohdalla mahdollista.

ESIMERKKI 1

Henna ja Make ottivat tasalyhenteisen asuntolainan. Lainan suuruus oli 150 000 €, laina-aika 10 vuotta ja korkokanta pankin oma primekorko 2,5 % + 2,0 %:n korkomarginaali. Henna ja Make lyhentävät lainaa kuukausittain.

a) Kuinka suuri on lainan lyhennys?
b) Kuinka suuri on ensimmäinen maksuerä?
c) Kuinka suuri on viimeinen maksuerä?
d) Kuinka paljon lainasta maksetaan kaiken kaikkiaan korkoa?

RATKAISU

a) Maksueriä on 10 vuoden aikana $10 \cdot 12 = 120$ kappaletta. Lainasumma jaetaan tasan näiden maksuerien kesken, eli lyhennys on

$$\frac{150000\,€}{120} = 1250\,€$$

b) Ensimmäisen maksuerän kohdalla lainan korko lasketaan koko lainan määrästä. Lainan korko on $2{,}5\,\% + 2{,}0\,\% = 4{,}5\,\%$. Koska lainaa lyhennetään joka kuukausi, lasketaan lainan kuukausikorko.

Kuukausikorko on $\frac{4{,}5\,\%}{12} = 0{,}375\,\%$.

maksuerä	=	lyhennys	+	korko

Ensimmäisen maksuerän suuruus on

$$1250\,€ + 0{,}00375 \cdot 150\,000\,€ = 1812{,}50\,€$$

c) Ennen viimeistä maksuerää lainaa on jäljellä viimeisen lyhennyksen verran eli 1250,00 €. Korko lasketaan tästä summasta. Viimeisen maksuerän suuruus on

$$1250\,€ + 0{,}00375 \cdot 1250\,€ = 1254{,}6875\,€ \approx 1254{,}69\,€$$

d) Kootaan maksuerien korkoja taulukkoon.

Maksuerä	Lainaa jäljellä (€)	Korko (€)
1	150 000	0,00375 · 150 000 = 562,50
2	150 000 – 1250 = 148 750	0,00375 · 148 750 = 557,8125
3	147 500	0,00375 · 147 500 = 553,125
⋮		
119	2500	0,00375 · 2500 = 9,375
120	1250	0,00375 · 1250 = 4,6875

Lainan summa pienenee aina lyhennyksen verran.

Tällöin korkojen määrä vähenee $0{,}00375 \cdot 1250\ € = 4{,}6875\ € \approx 4{,}69\ €$.

Korko pienenee joka maksukerta yhtä paljon.

$$562{,}50\ € - 557{,}8125\ € = 4{,}6875\ € \approx 4{,}69\ €$$

Korot muodostavat siis aritmeettisen lukujonon, jonka

- differenssi $d = -4{,}69\ €$
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 562{,}50\ €$
- viimeinen jäsen $a_{120} = 4{,}69\ €$
- jäsenten lukumäärä $n = 120$.

Korkojen yhteismäärä saadaan aritmeettisena summana.

$$S_{120} = 120 \cdot \frac{562{,}50\ € + 4{,}69\ €}{2} = 34031{,}40\ €$$

VASTAUS a) 1250 € b) 1812,50 € c) 1254,69 € d) 34 031,40 €

Tasaerä- eli annuiteettilaina

Tasaerä- eli annuiteettilaina on laina, jossa takaisinmaksuerä pysyy samansuuruisena niin kauan kuin korkokanta ei muutu. Lyhennyksen ja koron osuudet takaisinmaksuerästä vaihtelevat. Korko lasketaan aina kullekin takaisinmaksuerälle jäljellä olevan lainan määrän mukaan.

Lyhennyksen osuus takaisinmaksuerästä riippuu aina koron määrästä: mitä enemmän takaisinmaksuerässä maksetaan korkoja, sitä vähemmän lainaa pystytään lyhentämään.

Yhden maksuerän suuruus saadaan laskettua **annuiteetin** kaavalla.

Annuiteetin kaava s. 163

Annuiteetti eli tasaerä

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$$

- A = annuiteetti eli tasaerä
- K = lainapääoma
- n = maksukertojen lukumäärä
- q = korkotekijä

Esimerkiksi 120 000 euron lainan ensimmäiset kuukausierät 8 vuoden tasaerälainassa 3,5 %:n vuosikorolla ovat seuraavat:

	Lyhennys (€)	Korko (€)	Takaisinmaksu-erän suuruus (€)	Lainaa jäljellä ennen lyhennystä
1.	1084,97	350,00	1434,97	120 000,00
2.	1088,13	346,84	1434,97	118 915,03
3.	1091,30	343,67	1434,97	117 826,90
4.	1094,49	340,48	1434,97	116 735,60
5.	1097,68	337,29	1434,97	115 641,11

Koron määrä pienenee ja lyhennyksen määrä kasvaa.

Lyhennyksen ja koron määrät muuttuvat jokaisessa maksuerässä.

Korkokannan muuttuessa on päätettävä, pidetäänkö maksuerä samana vai muutetaanko sitä, jotta saadaan pidettyä laina-aika samana.

- Tavallisessa annuiteetti- eli tasaerälainassa laina-aika pysyy muuttumattomana. Takaisinmaksuerän suuruus muuttuu korkokannan muuttuessa.

- **Kiinteässä tasaerälainassa** maksuerä pysyy muuttumattomana. Laina-aika muuttuu korkokannan muuttuessa.

Annuiteettilainassa (sekä tavallisessa että kiinteässä tasaerälainassa) tietyn maksuerän jälkeen jäljellä oleva lainan määrä on hankalampi selvittää kuin tasalyhennyslainassa.

Jäljellä oleva lainan määrä annuiteettilainassa

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

- V_k = jäljellä oleva lainan määrä k:nnen lyhennyksen jälkeen
- K = lainapääoma
- q = korkotekijä
- k = lyhennysten määrä
- A = annuiteetti

ESIMERKKI 2

Henna ja Make ottivat annuiteettilainan asunnon ostoa varten. Lainan suuruus oli 150 000 €, laina-aika 10 vuotta sekä korkokanta pankin oma primekorko 2,5 % + 2,0 % korkomarginaali. Henna ja Make lyhentävät lainaa kuukausittain.

a) Kuinka suuri on tasaerä?
b) Kuinka paljon lainaa lyhennetään ensimmäisellä maksukerralla?
c) Kuinka paljon lainaa on jäljellä 50 lyhennyksen jälkeen?
d) Kuinka paljon lainasta maksetaan kaiken kaikkiaan korkoa?

RATKAISU

a) Lainan korko on 2,5 % + 2,0 % = 4,5 %, joten kuukausikorko on $\frac{4{,}5\,\%}{12} = 0{,}375\,\%$. Tällöin korkotekijä on $q = 1{,}00375$.

Lainan maksueriä on yhteensä 120 kappaletta. Lasketaan tasaerän suuruus annuiteetin kaavalla.

$$A = 150000 \cdot 1{,}00375^{120} \cdot \frac{1-1{,}00375}{1-1{,}00375^{120}}$$
$$= 1554{,}576\ldots$$
$$\approx 1554{,}58\ (€)$$

$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n}$

b) Maksuerän suuruus on aina 1554,58 €. Ensimmäisellä kerralla tässä maksuerässä on mukana koko lainasummasta maksettava korko, joten lyhennyksen suuruus on

$$1554{,}58\ € - 0{,}00375 \cdot 150\,000\ € = 992{,}08\ €$$

c) 50 lyhennyksen jälkeen lainaa on jäljellä

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$$

$$V_{50} = 150000 \cdot 1{,}00375^{50} - 1554{,}58 \cdot \frac{1-1{,}00375^{50}}{1-1{,}00375}$$
$$= 95552{,}714\ldots$$
$$\approx 95552{,}71\ (€)$$

Lainan maksuerä maksetaan pankille sentin tarkkuudella, joten käytetään jäljellä olevan lainan maksuun annuiteetin pyöristettyä arvoa 1554,58 €.

d) Pankille maksetaan yhteensä 120 · 1554,58 € = 186 549,60 €. Koska lainan suuruus oli 150 000 €, maksetaan lainasta korkoja yhteensä

$$186\,549{,}50\ € - 150\,000\ € = 36\,549{,}60\ €$$

VASTAUS

a) 1554,58 € b) 992,08 € c) 95 552,71 € d) 36 549,60 €

Esimerkeissä 1 ja 2 on tarkasteltu samansuuruista lainaa kahdella eri tavalla: tasalyhennyslainana ja annuiteettilainana.

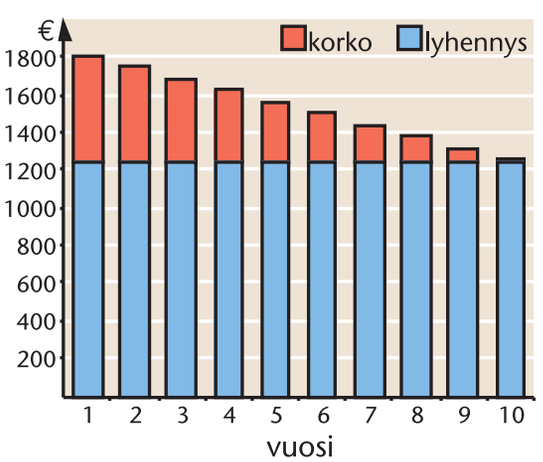
	Tasalyhennyslaina (esimerkki 1)	Annuiteettilaina (esimerkki 2)
ensimmäinen maksuerä	1812,50 €	1554,58 €
ensimmäisen maksuerän lyhennys	1250,00 €	992,08 €
viimeinen maksuerä	1254,69 €	1554,58 €
viimeisen maksuerän lyhennys	1250,00 €	1548,77 €
korkojen kokonaismäärä	34 031,40 €	36 549,60 €

Tasalyhennyslainan maksuerän suuruus pienenee ajan mittaan, kun annuiteettilainassa maksuerä pysyy samana.

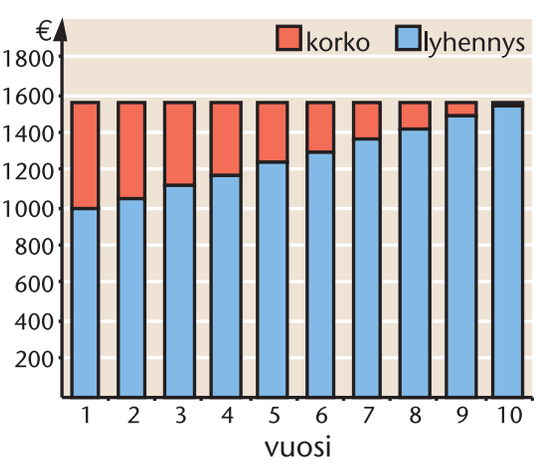
Annuiteettilainassa lyhennyksen määrä kasvaa ajan kuluessa niin, että viimeisessä maksuerässä ei korkoja juurikaan enää ole. Tasalyhennyslainassa lyhennyksen määrä pysyy vakiona.

Korkojen kokonaismäärän mukaan tasalyhennyslaina on lainan ottajan kannalta edullisempi vaihtoehto. Annuiteettilaina on kuitenkin yleisempi lainamuoto, sillä ensimmäiset maksuerät ovat usein lainanottajalle tasalyhennyslainassa liian suuria. Alla olevissa kuvissa on kuvattu koron, lyhennyksen ja maksuerän suuruutta esimerkkien 1 ja 2 tilanteissa jokaisen vuoden ensimmäisen maksuerän kohdalla.

Tasalyhennyslaina



Annuiteettilaina



ESIMERKKI 3

Eräällä merialueella sillikannan kooksi arvioitiin 250 tonnia. Kalastusta on rajoitettu sillien kutuaikana. Rauhoitusajan päättyessä sillikannan arvioidaan kasvaneen 15 %. Tämän jälkeen alkavan kalastuskauden aikana silliä pyydetään 40 tonnia. Jos kehitys jatkuu samanlaisena, mikä on sillikannan koko kymmenen vuoden kuluttua?

RATKAISU

Annuiteettilainaan liittyviä kaavoja voidaan soveltaa monissa tilanteissa.

Vuotuinen kalansaalis on 40 tonnia. Koska se säilyy muuttumattomana, sitä voidaan pitää annuiteettina, eli

$$A = 40$$

Korkokertoimena on 100 % + 15 % = 115 % = 1,15.

$$q = 1{,}15$$

Sillikannan koko alkutilanteessa vastaa lainapääomaa, eli

$$K = 250$$

Kalakannan koko kymmenen vuoden kuluttua (V) vastaa lainalaskussa jäljellä olevan lainan määrää tietyn ajan jälkeen:

$$\begin{aligned} V &= Kq^k - A \cdot \frac{1-q^k}{1-q} \\ &= 250 \cdot 1{,}15^{10} - 40 \cdot \frac{1-1{,}15^{10}}{1-1{,}15} \\ &= 199{,}240\ldots \\ &\approx 200 \end{aligned}$$

VASTAUS

Sillikannan koko kymmenen vuoden kuluttua on 200 tonnia.

ESIMERKKI 4

Tiia ja Sami ottavat 180 000 €:n asuntolainan 25 vuoden maksuajalla. Laina on kuukausittain maksettava annuiteettilaina. 100:nnen maksuerän jälkeen lainan korko nousee 3,24 prosentista 5,40 prosenttiin. Kuinka paljon laina-aika pitenee, kun tasaerä pysyy samana?

RATKAISU

Kuukausikorko lainalle on aluksi $\frac{3{,}24\,\%}{12} = 0{,}27\,\%$. Tasaeriä on koko laina-aikana yhteensä $25 \cdot 12 = 300$ kappaletta.

Annuiteetin suuruus on siis

$$\begin{aligned} A &= 180000 \cdot 1{,}0027^{300} \cdot \frac{1-1{,}0027}{1-1{,}0027^{300}} \\ &= 876{,}218\ldots \\ &\approx 876{,}22\ (€) \end{aligned}$$

Kun lainaa on maksettu takaisin 100 maksuerän verran, lainaa on vielä jäljellä

$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q}$

$$\begin{aligned} V_{100} &= 180000 \cdot 1{,}0027^{100} - 876{,}22 \cdot \frac{1-1{,}0027^{100}}{1-1{,}0027} \\ &= 135270{,}972\ldots \\ &\approx 135270{,}97\ (€) \end{aligned}$$

Korkokannan noustessa lainaa on siis vielä maksamatta 135 270,97 €. Lainan uusi kuukausikorko on $\frac{5{,}40\,\%}{12} = 0{,}45\,\%$, ja sitä vastaava korkotekijä on $q = 1 + 0{,}0045 = 1{,}0045$.

Annuiteetin suuruus säilyy samana, eli $A = 876{,}22$ €. Merkitään 135 270,97 €:n suuruisen lainan maksamiseksi tarvittavia maksukertoja kirjaimella x.

Kun arvot sijoitetaan annuiteetin kaavaan, saadaan yhtälö

$Kq^n\frac{1-q}{1-q^n} = A$

$$135270{,}97 \cdot 1{,}0045^x \cdot \frac{1-1{,}0045}{1-1{,}0045^x} = 876{,}22 \quad \big| \cdot (1-1{,}0045^x)$$

$$135270{,}97 \cdot 1{,}0045^x \cdot (-0{,}0045) = 876{,}22 - 876{,}22 \cdot 1{,}0045^x$$

$$-608{,}719365 \cdot 1{,}0045^x = 876{,}22 - 876{,}22 \cdot 1{,}0045^x$$

Erotetaan yhteinen tekijä.

$$-608{,}719365 \cdot 1{,}0045^x + 876{,}22 \cdot 1{,}0045^x = 876{,}22$$

Erotetaan yhtälön vasemmalta puolelta termi $1{,}0045^x$ yhteiseksi tekijäksi.

$$1{,}0045^x \cdot (-608{,}719365 + 876{,}22) = 876{,}22$$

$$1{,}0045^x \cdot 267{,}500635 = 876{,}22 \quad | : 267{,}500635$$

$$1{,}0045^x = 3{,}275\ldots$$

$$\lg 1{,}0045^x = \lg 3{,}275\ldots$$

$$x \lg 1{,}0045 = \lg 3{,}275\ldots \quad | : \lg 1{,}0045$$

$$x = \frac{\lg 3{,}275\ldots}{\lg 1{,}0045}$$

$$x = 264{,}258\ldots$$

Jos maksueriä on 265, viimeinen maksuerä on muita pienempi. Jos maksueriä on 264, viimeinen maksuerä on muita suurempi.

Tasaeriä lopun lainan maksuun tarvitaan siis noin 265 kappaletta. Tämä on 65 maksuerää alkuperäistä maksusuunnitelmaa enemmän. Lainan takaisinmaksuaika kasvaa siis 65 kuukautta eli 5 vuotta ja 5 kuukautta.

VASTAUS Laina-aika kasvaa 5 vuotta ja 5 kuukautta.

Tehtäviä

134. Tasalyhenteisen remonttilainan korko on 5,52 %. Lainaa lyhennetään kuukausittain 5 vuoden ajan. Lainan suuruus on 9600 €.
   a) Kuinka suuria ovat lainan ensimmäinen ja viimeinen maksuerä?
   b) Kuinka paljon lainaa on jäljellä 10 lyhennyksen jälkeen?

E1 135. Liisa ja Harri maksavat 84 000 €:n tasalyhenteisen asuntolainansa takaisin 7 vuodessa. He lyhentävät lainaa kolmen kuukauden välein. Lainan viitekorko on 3,50 % ja korkomarginaali 1,30 %.
   a) Kuinka suuri on lainan lyhennys?
   b) Kuinka suuria ovat ensimmäinen ja viimeinen maksuerä?

136. Ella ottaa 10 000 €:n autolainan tasalyhennyslainana. Lainaa maksetaan kuukausittain takaisin kuuden vuoden ajan. Mikä on lainan korkokanta, kun ensimmäisen maksuerän suuruus on 200 €?

137. Pankkilainaa hoidetaan kuukausittain maksamalla korkoa ja 840 euron lyhennys. Syyskuussa 2000 lainan hoitokulut olivat 890 €. Vuotuinen korkoprosentti oli 8,59. Milloin laina oli kokonaan maksettu? [mukailtu S1997, 6a]

138. Jaanan ja Jurin tasalyhenteisen asuntolainan suuruus on 95 000 €. He maksavat lainan takaisin 12 vuodessa. Lainan korko on 3,72 % ja lyhennykset tapahtuvat kuukausittain. Kuinka paljon he yhteensä maksavat pankille takaisin?

139. Tasalyhenteisen asuntolainan suuruus on 135 000 €. Lainan korko on euribor 2,05 % ja pankin korkomarginaali 2,15 %. Lainaa maksetaan pankille takaisin kuukausittain 20 vuoden ajan. Kun lainan lyhennyksiä on maksettu 40 maksuerää, nousee lainan korko 0,6 prosenttiyksikköä.
   a) Kuinka paljon lainaa on maksamatta 40 maksuerän jälkeen, kun korko nousee?
   b) Kuinka paljon lainasta maksetaan kaiken kaikkiaan korkoa?

140. Kirsi ja Jari ottivat 175 000 €:n annuiteettilainan asunnon ostoa varten. Lainan takaisinmaksuaika oli 25 vuotta, lainan korko euribor 2,09 % ja pankin korkomarginaali 1,75 %. Kirsi ja Jari lyhensivät lainaa kuukausittain.
   a) Laske annuiteetin eli tasaerän suuruus.
   b) Kuinka paljon lainasta maksetaan korkoa kaikkiaan?

E2 141. Olivia ja Venla päättivät ostaa sijoitusmielessä kimppayksiön. He ottivat sitä varten yhdessä 58 000 €:n annuiteettilainan 7 vuoden laina-ajalla ja 4,2 %:n korolla. Tytöt lyhensivät lainaa kuukausittain.

a) Kuinka suuria ovat ensimmäinen ja viimeinen maksuerä?
b) Kuinka paljon lainaa lyhennetään ensimmäisellä maksukerralla?
c) Kuinka paljon lainaa lyhennetään viimeisellä maksukerralla?

142. Siri ja Artturi asuvat vuokralla mutta suunnittelevat oman asunnon ostoa. He maksavat nykyisestä asunnostaan 580 euron kuukausivuokraa ja suunnittelevat ottavansa annuiteettilainaa sen verran, että lainan takaisinmaksuerä olisi korkeintaan kuukausivuokran suuruinen. Pankki tarjoaa lainaa 20 vuoden laina-ajalla ja 4,92 %:n vuosikorolla. Voivatko Siri ja Artturi ostaa lainarahalla 108 000 € hintaisen asunnon?

143. Henkilö otti kahden vuoden tasaerä- eli annuiteettilainan 12 %:n vuotuisella korolla. Hän maksoi lainan suorittamalla kerran kuussa aina saman summan, $a = 393$ €, yhteensä 24 kertaa. Kuinka suuresta lainasta oli kysymys? [mukailtu S1996, 10c]

144. Annuiteettilainan suuruus on 135 000 €. Lainan viitekorko on 2,05 % ja pankin korkomarginaali 2,15 %. Lainaa maksetaan takaisin kuukausittain 20 vuoden ajan. Kuinka paljon lainaa on jäljellä 40 maksuerän jälkeen?

145. Vertaile tasalyhennyslainaa ja annuiteettilainaa ensimmäisen maksuerän, ensimmäisen lyhennyksen, viimeisen maksuerän, viimeisen lyhennyksen sekä korkojen kokonaismäärän avulla seuraavassa tilanteessa: Disa osti uuden auton, jonka hinta oli 25 000 €. Auton hinnasta 80 % rahoitettiin lainarahalla. Lainaa maksettiin kuukausittain takaisin 7 vuoden ajan 4,8 %:n vuosikorolla.

146. Elias ja Aleksi ottivat molemmat 155 000 €:n annuiteettilainan asunnon ostoa varten 4,2 %:n korkokannalla. Elias otti lainalleen 30 vuoden ja Aleksi 15 vuoden laina-ajan. Lainaa lyhennetään kuukausittain. Kahden vuoden kuluttua lainan korko muuttui 6,0 prosenttiin. Laske kummankin pojan takaisinmaksuerän suuruus koron muuttumisen jälkeen, kun laina-ajat pysyivät samoina.

E3 147. Vesisäiliössä oli vettä aluksi 1200 litraa. Päivän aikana säiliöön valuu lisää vettä niin, että vesimäärä kasvaa aina 15 %. Joka ilta säiliöstä poistetaan vettä 200 litraa. Kuinka paljon säiliössä on vettä kahden viikon kuluttua?

148. Tutkimuksessa havaittiin, että bakteerien määrä kasvatusalustalla lisääntyy 5 % tunnissa. Joka tunti alustalta poistetaan noin 1500 bakteeria. Vuorokauden kuluttua tutkimuksen aloittamisesta bakteereja on kasvatusalustalla 20 000 kappaletta. Kuinka paljon bakteereja oli tutkimuksen alussa?

E4 149. Pekka hankki 46 000 euron arvoisen veneen. Hän otti veneen ostoa varten ostosumman suuruisen annuiteettilainan 5,1 %:n vuosikorolla. Pekka lyhentää lainaa joka kuukausi. Alun perin lainan takaisinmaksuaika oli 6 vuotta, mutta vuoden kuluttua lainan korko nousi 2,1 prosenttiyksikköä.

a) Kuinka suuri on maksuerä koron nousun jälkeen, jos laina-aika pysyy samana?
b) Kuinka paljon Pekan laina-aika muuttui, jos takaisinmaksuerä pysyy koko laina-ajan yhtä suurena?

150. Elias ja Aleksi ottivat molemmat 155 000 €:n asuntolainan 4,2 %:n korkokannalla. Elias otti lainalleen 30 vuoden ja Aleksi 15 vuoden laina-ajan. Kahden vuoden kuluttua lainan korko muuttui 6,0 prosenttiin. Kuinka paljon lainan takaisinmaksuaika kasvaa kummallakin pojalla, kun laina on tasaerälaina?

151. Etsi internet-sivuilta eri pankkien lainalaskureita ja tutustu niiden toimintaan. Laske, millaisen kuukausittaisen takaisinmaksuerän ja korkojen määrän lainalaskurit antavat 200 000 €:n annuiteettilainalle, jonka laina-aika on 30 vuotta ja vuosikorko 6,0 %. Tarkista itse laskemalla, toimiiko lainalaskuri oikein.

Sekalaisia tehtäviä

152. Liittyvätkö seuraavat väittämät tasalyhennyslainaan vai annuiteettilainaan?
   a) Kaikki maksuerät ovat yhtä suuria.
   b) Lyhennyksen osuus maksuerissä vaihtelee.
   c) Korkojen osuus maksuerissä vaihtelee.
   d) Ensimmäinen maksuerä on suurin.
   e) Ensimmäisessä maksuerässä maksetaan enemmän korkoja kuin muissa maksuerissä.
   f) Viimeinen maksuerä on pienin.

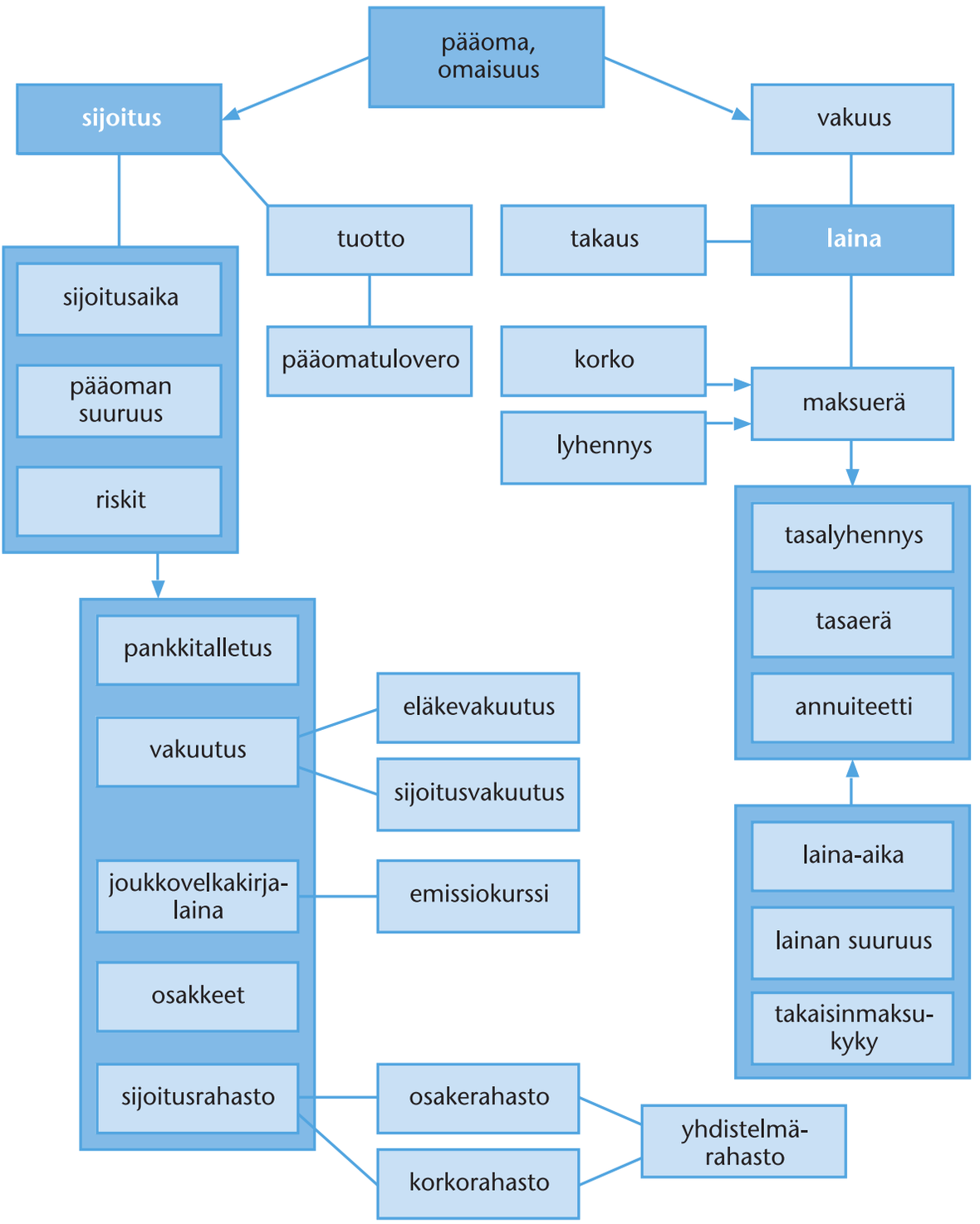
153. Otto saa pankista auton vaihtoa varten 17 000 euron lainan. Hän otti lainan tasalyhennyslainana 6,0 %:n vuosikorolla. Laina-aika on 4 vuotta ja lainaa maksetaan takaisin puolivuosittain.
   a) Muodosta taulukko, josta näkyvät maksuerän suuruus sekä lyhennyksen ja koron määrä kussakin maksuerässä.
   b) Kuinka paljon lainasta maksetaan korkoja kaiken kaikkiaan?

154. Peppi ostaa itselleen huvilan, jonka myyntihinta on 130 800 €. Hän ottaa huvilan ostoa ja kunnostusta varten 140 000 euron annuiteettilainan 25 vuoden laina-ajalla ja 3,36 %:n vuosikorolla. Lainaa lyhennetään kuukausittain.
   a) Laske tasaerän suuruus.
   b) Kuinka paljon Peppi maksaa korkoja koko laina-aikana?

155. Nelli ansaitsee 2800 € kuukaudessa. Hän arvelee pystyvänsä käyttämään 30 % kuukausipalkastaan lainanhoitokuluihin. Laske tämän perusteella, kuinka suuren annuiteettilainan Nelli pystyy ottamaan, jos lainan korko olisi 3,72 % ja laina-aika 10 vuotta.

156. Henkilö otti vuoden 2003 alussa 40 000 euron asuntolainan 10 vuodeksi. Hän maksaa lainan ja korot yhtä suurena vuotuisena eränä aina vuoden lopussa, ts. kyseessä on tasaerälaina. Mikä on erän suuruus, jos korko on neljä prosenttia? Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu (mahdollisesti pienemmäksi jäävää viimeistä erää lukuun ottamatta), vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Minkä vuoden lopussa henkilö maksaa viimeisen erän, jos korko nousee viiden vuoden kuluttua kuuteen prosenttiin eikä tämän jälkeen muutu? Mikä on viimeisen erän suuruus? [K2004, 15]

Keskeisiä käsitteitä



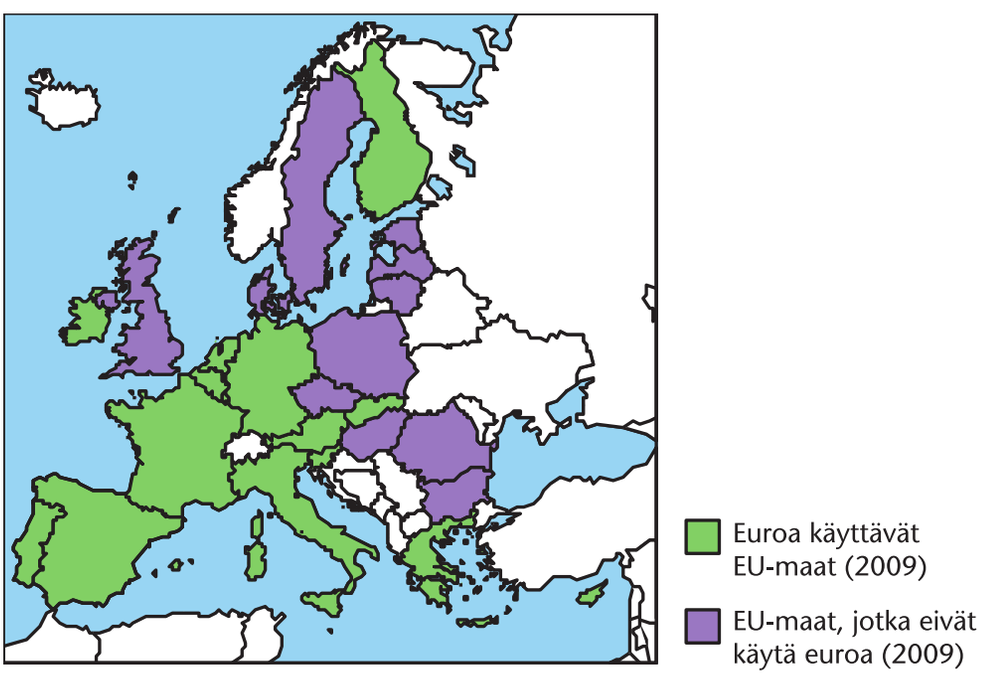
5 Raha ja sen arvo

5.1 Valuutat

Valuuttakurssit

Valuuttamarkkinat ovat maailman suurimmat markkinat. Tärkeimmät valuutat ovat US dollari, euro, Japanin jeni, Sveitsin frangi ja Iso-Britannian punta. Maailmassa on käytössä yli 150 erilaista valuuttaa. Jotta matkustus, kaupankäynti ja erilainen liiketoiminta sujuisivat mahdollisimman vaivattomasti, eri valuuttojen väliset suhteet ilmoitetaan valuuttakursseina.

Euro on useimpien Euroopan maiden yhteinen valuutta. Vuonna 2002 osa Euroopan unionin jäsenvaltioista vaihtoi kansallisen valuuttansa euroon. Maat olivat Alankomaat, Belgia, Espanja, Irlanti, Italia, Itävalta, Kreikka, Luxemburg, Portugali, Ranska, Saksa ja Suomi. Vanhat kansalliset valuutat, kuten Suomen markka, muunnetaan euroiksi virallisia muutoskertoimia käyttäen, esimerkiksi 1 € = 5,94573 mk.



Eurosetelit ovat kaikissa maissa samat. Jokainen maa tuottaa omat kolikkonsa, joiden toinen puoli on yhteinen ja toisella puolella on kansallinen tunnus. Kaikkia seteleitä ja kolikoita voi käyttää kaikkialla euroalueella.

Euroopan keskuspankki (EKP) julkaisee euroalueen ulkopuolisten valuuttojen valuuttakursseja euroa vastaan. Valuuttakurssit kertovat yhden euron arvon ulkomaan valuuttana. Tätä kutsutaan **epäsuoraksi noteeraukseksi**. Suomen Pankki julkaisee kurssit päivittäin heti Euroopan keskuspankin jälkeen.

EKP:n julkaisemia euron kursseja 20.2.2010 klo 15.15

Valuutta		Valuuttaa (€)	Valuutta-koodi
Australia	dollari	1,5113	**AUD**
Iso-Britannia	punta	0,87970	**GBP**
Japani	jeni	124,38	**JPY**
Kanada	dollari	1,4133	**CAD**
Norja	kruunu	8,0350	**NOK**
Ruotsi	kruunu	9,8090	**SEK**
Sveitsi	frangi	1,4649	**CHF**
Tanska	kruunu	7,4436	**DKK**
Turkki	liira	2,0681	**TRL**
USA	dollari	1,3626	**USD**
Viro	kruunu	15,6466	**EEK**

Lähde: Suomen pankki

Valuutoille on käytössä kolmikirjaimiset lyhenteet. Lyhenne on pääsääntöisesti muodostettu maan kaksikirjaimisesta koodista ja valuutan nimestä.

USD on Yhdysvaltain (**US**) dollari.

Epäsuoran noteerauksen mukaan

$$1\ € = 1{,}3626\ \text{USD}$$

Suorassa noteerauksessa kerrotaan, kuinka paljon yksi ulkomaan valuutta on euroina.

Kurssit toistensa käänteislukuja.

$1\ € = 1{,}3626\ \text{USD}$

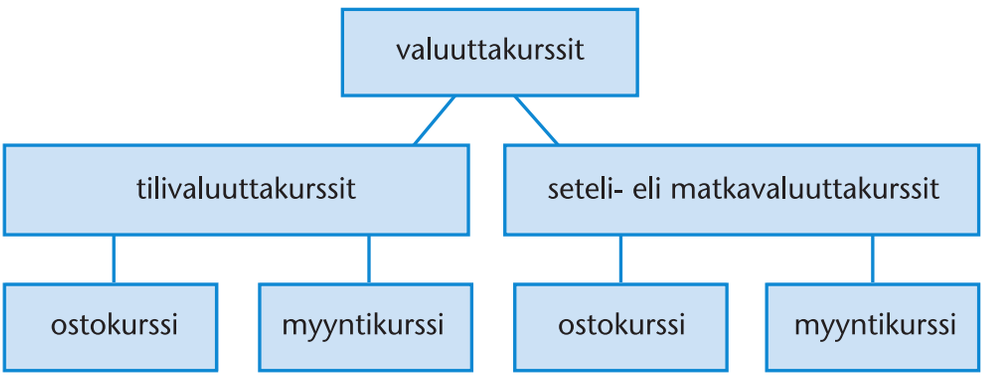
$1\,\text{USD} = \frac{1}{1{,}3626}\ €$

$$1\,\text{USD} = \frac{1}{1{,}3626}\ € = 0{,}73389\ldots\ € \approx 0{,}7339\ €$$

Pankit ja muut valuutanvaihtopisteet muodostavat omat kurssinsa Euroopan keskuspankin kurssien perusteella. Suomalaiset pankit käyttävät pääsääntöisesti epäsuoraa noteerausta, kun taas osa valuuttaa vaihtavista yrityksistä käyttää suoraa noteerausta.

Valuuttakursseissa valuutan vaihto eritellään sen mukaan, käsitelläänkö valuuttaa suoraan tilien kautta ja konkreettisesti seteleinä.

Tilivaluuttakursseja käytetään yritysten maksuliikenteessä. **Seteli**- eli **matkavaluuttakurssit** ovat yksityishenkilön rahanvaihdossa käyttämiä kursseja. Tässä kirjassa valuuttalaskuja käsitellään vain seteli- eli matkavaluutanvaihtoon liittyvissä tilanteissa.



Kummassakin tapauksessa valuuttakurssit jaetaan vielä kahteen ryhmään: **osto**- ja **myyntikursseihin**. Osto- ja myyntikurssit ajatellaan aina pankin kannalta.

"Tuote", jota pankki myy ja ostaa, on aina ulkomaanvaluutta, ei eurot.

- Kun lomamatkalle lähtevä turisti vaihtaa valuuttaa, pankki myy ulkomaanvaluutan myyntikurssin mukaan.
- Kun lomamatkalta palaava turisti vaihtaa ulkomaanvaluuttaa takaisin, pankki ostaa valuutan ostokurssin mukaan.

Valuutanvaihto on pankeille ja muille valuutanvaihtopisteille kannattavaa liiketoimintaa. Ne siis ostavat valuuttaa halvemmalla kuin mitä myyvät sitä ulos. Tämän lisäksi osa pankeista ja valuutanvaihtopisteistä perii erisuuruisia palkkioita valuutanvaihdosta. Tässä kirjassa valuutanvaihtopalkkiot jätetään huomioimatta, ellei niitä erikseen mainita.

Esimerkeissä ja tehtävissä käytetään näitä kursseja.

	Matkavaluutta	
	Myynti	**Osto**
Australian dollari AUD)	1,4501	1,5881
Englannin punta (GBP)	0,8490	0,8890
Japanin jeni (JPY)	120,29	129,09
Ruotsin kruunu (SEK)	9,5923	10,044
Sveitsin frangi (CHF)	1,4339	1,5019
Thaimaan baht (THB)	42,595	48,395
USA:n dollari (USD)	1,3426	1,4026

Lähde: Helsingin Sanomat 18.2.2010

ESIMERKKI 1

Perttu on lähdössä lomamatkalle Englantiin. Pertulla on 200 euron matkakassa, jonka hän aikoo vaihtaa Englannin punniksi (£).

a) Kuinka paljon Perttu saa puntia, kun valuutanvaihtopiste ei peri mitään vaihtopalkkiota?

b) Matkalta palatessaan Pertulla on jäljellä 15,20 puntaa. Hän vaihtaa ne takaisin euroiksi samassa valuutanvaihtopisteessä. Kuinka paljon Perttu saa euroja?

RATKAISU

a) Valuutanvaihtopiste myy Pertulle Englannin puntia, joten laskussa käytetään setelivaluutan myyntikurssia. Englannin punnan myyntikurssi on

$$1\ € = 0{,}8490\ \text{GBP}$$

Tällöin $200\ € = 200 \cdot 0{,}8490\ £ = 169{,}80\ £$.

Tarkka puntien määrä riippuu siitä, minkä kokoisia seteleitä ja kolikoita valuutanvaihtopisteessä on.

b) Valuutanvaihtopiste ostaa Pertulta puntia, joten laskussa käytetään setelivaluutan ostokurssia. Englannin punnan ostokurssi on

$$1\ € = 0{,}8890\ \text{GBP}$$

Tapa 1

Rahojen määrät ovat suoraan verrannolliset:

EUR	GBP
1	0,8890
x	15,20

Merkitään saatavaa euromäärää kirjaimella x.

$$\frac{1}{x} = \frac{0{,}8890}{15{,}20}$$

$$0{,}8890x = 15{,}20$$

$$x = \frac{15{,}20}{0{,}8890} = 17{,}097\ldots\ (€)$$

Tapa 2

Koska $1\ € = 0{,}8890\ \text{GBP}$, niin

$$1\ \text{GBP} = \frac{1}{0{,}8890}\ €.$$

Kurssit toistensa käänteislukuja.

Tällöin

$$15{,}20\ \text{GBP} = 15{,}20 \cdot \frac{1}{0{,}8890}\ €$$

$$= 17{,}097\ldots\ €$$

VASTAUS a) 169,80 £ b) 17,10 €

ESIMERKKI 2

Lauralle oli jäänyt Yhdysvaltojen matkalta 85 dollaria. Hän vaihtoi ne Suomessa Euroopan matkaansa varten Sveitsin frangeiksi. Kuinka paljon frangeja Laura sai?

RATKAISU

Pankki ostaa ensin Lauralta dollarit. USA:n dollarin ostokurssi setelivaluutalle on 1 € = 1,4026 USD.

Tapa 1

Käytetään verrannollisuutta.

EUR	USD
1	1,4026
x	85

$$\frac{1}{x} = \frac{1{,}4026}{85}$$

$$1{,}4026x = 85 \qquad | : 1{,}4026$$

$$x = \frac{85}{1{,}4026}$$

$$x = 60{,}6017\ldots$$

$$x \approx 60{,}60\ (€)$$

Tapa 2

Koska 1 € = 1,4026 USD, niin

$$1\ \text{USD} = \frac{1}{1{,}4026}\ € \cdot$$

Tällöin

$$85\ \text{USD} = 85 \cdot \frac{1}{1{,}4026}\ €$$

$$= 60{,}6017\ldots\ €$$

$$\approx 60{,}60\ €$$

Rahalaskuissa pyöristetään usein tulokset kesken laskun kahden desimaalin tarkkuuteen.

Eurot vaihdetaan Sveitsin frangeiksi, jolloin pankki myy valuuttaa. Sveitsin frangin myyntikurssi setelivaluutalle on

$$1\ € = 1{,}4339\ \text{CHF}$$

Laura saa frangeja $60{,}60 \cdot 1{,}4339\ \text{CHF} = 86{,}894\ldots\ \text{CHF}$.

Lauran todellisuudessa saama frangimäärä riippuu siitä, minkä kokoisia seteleitä ja kolikoita valuutanvaihtopisteessä on. Laskuissa vastaus voidaan pyöristää normaalien pyöristyssääntöjen mukaan.

VASTAUS

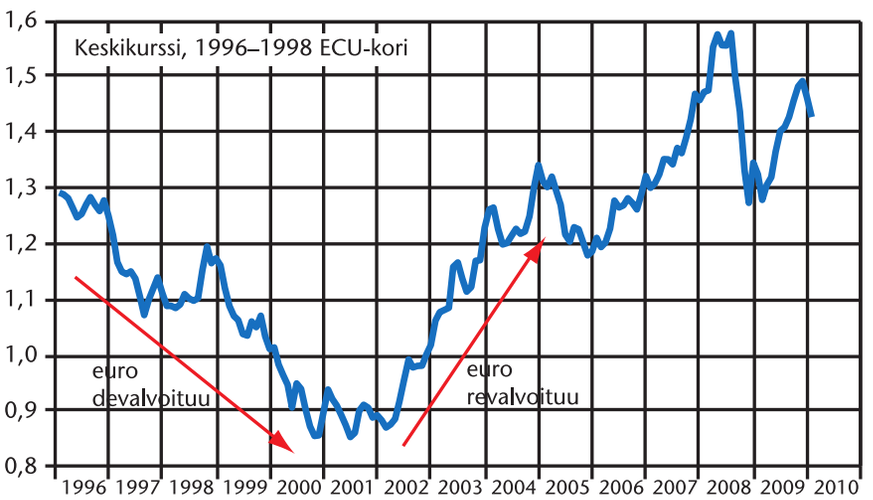
Laura saa 86,89 Sveitsin frangia.

Revalvaatio ja devalvaatio

Euron arvo muuttuu päivittäin suhteessa muihin valuuttoihin. Tällöin puhutaan valuutan ulkoisen arvon muuttumisesta. Valuutan **ulkoinen arvo** voi joko laskea tai kasvaa suhteessa muihin valuuttoihin.

Seuraavassa kuvaajassa on kuvattu euron arvoa Yhdysvaltain dollareina. Kun euron arvoa kuvaava käyrä laskee, euron arvo suhteessa dollariin heikkenee. Tällöin sanotaan, että euro **devalvoituu** dollariin nähden. Kun taas käyrä nousee, euron arvo suhteessa dollariin vahvistuu. Tällöin euro **revalvoituu** suhteessa dollariin.

Euron arvo USA:n dollareina



Lähde: Suomen pankki

Devalvaatio ja revalvaatio

Devalvaatiolla tarkoitetaan valuutan ulkoisen arvon alenemista suhteessa muihin valuuttoihin.

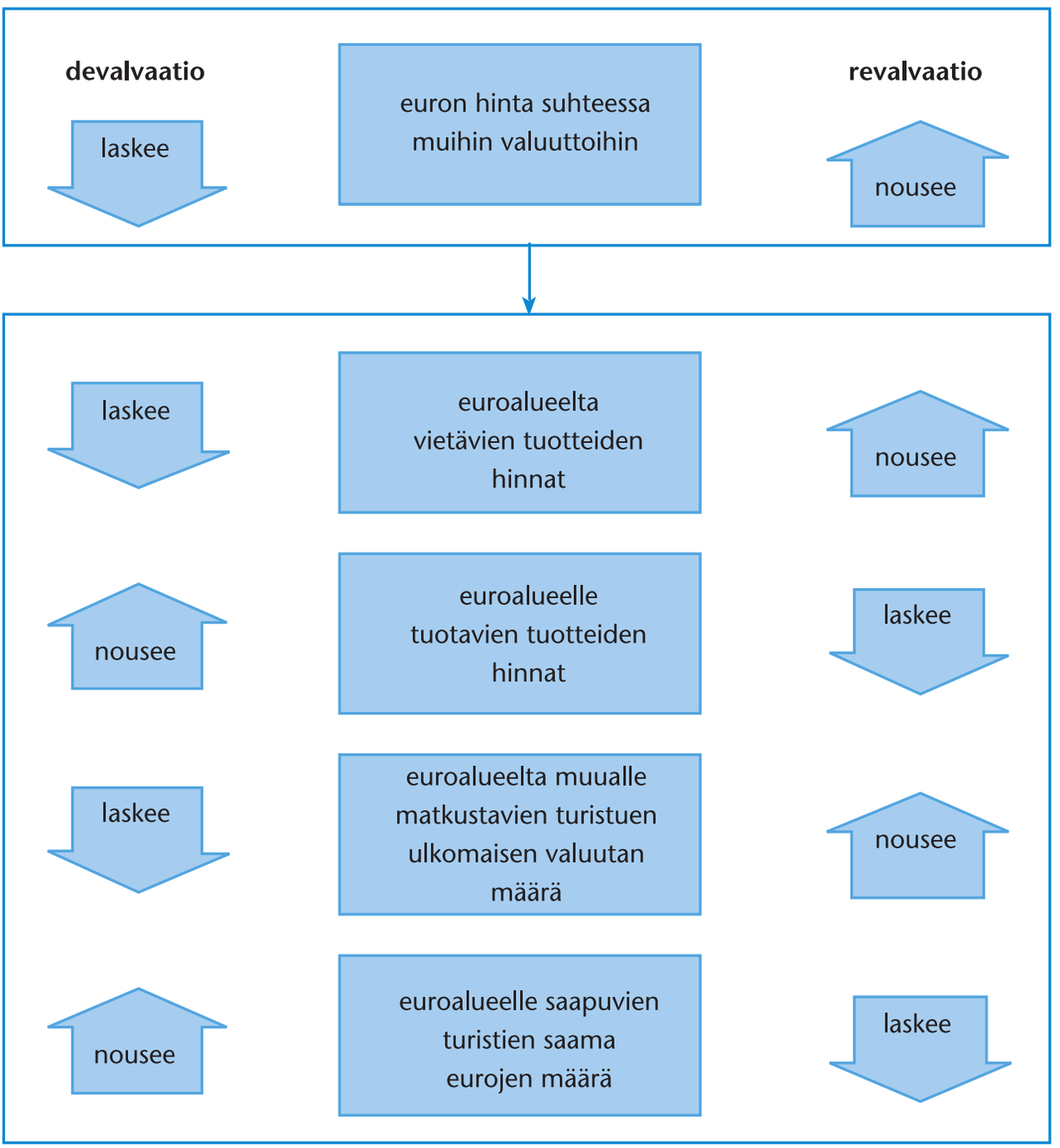
Revalvaatiolla tarkoitetaan valuutan ulkoisen arvon kasvamista suhteessa muihin valuuttoihin.

Devalvaatio parantaa esimerkiksi vientiteollisuuden hintakilpailukykyä ulkomailla. Ulkomaisten ostajien näkökulmasta vientituotteiden hinnat alenevat. Tuontitavarat puolestaan ovat aikaisempaa kalliimpia.

Suomeen tulevien turistien kannalta euron devalvoituminen on hyvä asia: samalla ulkomaan valuutalla saa tällöin enemmän euroja ja ostosten tekeminen on edullisempaa.

Revalvaatio huonontaa hintakilpailukykyä ulkomailla. Revalvaation seurauksena vientituotteiden hinnat nousevat ulkomaisten ostajien kannalta. Tällöin tuotteiden vienti ulkomaille vaikeutuu. Tuontitavaroiden hinnat puolestaan laskevat, joten tuonti lisääntyy.

Turistit eivät toivo matkakohteen valuutan revalvaatiota, sillä revalvoitua valuuttaa saa vaihdossa alkuperäistä vähemmän. Matkakohteessa ostosten tekeminen on silloin kalliimpaa.



ESIMERKKI 3

Juuso vaihtoi euroja Yhdysvaltain dollareiksi. Yhdellä eurolla sai 1,2376 dollaria. Kuukauden kuluttua yhdellä eurolla sai 1,3560 dollaria.

a) Devalvoituiko vai revalvoituiko euro suhteessa dollariin? Kuinka monta prosenttia?

b) Devalvoituiko vai revalvoituiko dollari suhteessa euroon? Kuinka monta prosenttia?

RATKAISU

a) Euron arvo nousi suhteessa dollariin, joten euro revalvoitui.

Valuuttakurssien suhde on

$$\frac{1{,}3560\ \text{USD}}{1{,}2376\ \text{USD}} = 1{,}0956\ldots \approx 109{,}6\ \%$$

Samalla euromäärällä saadaan revalvoitumisen jälkeen 9,6 % enemmän dollareita.

Euron revalvaatioprosentti on $109{,}6\ \% - 100\ \% = 9{,}6\ \%$.

b) Kun tarkastellaan valuutan ulkoisen arvon muutosta, on valuuttakurssit muutettava sen valuutan mukaiseksi, johon **verrataan**.

Kun verrataan muutosta suhteessa euroon, lasketaan ensin paljonko yksi dollari oli euroina.

- 1. vaihtokerta: $1\ \text{USD} = \frac{1}{1{,}2376}\ € = 0{,}80801\ldots\ €$
- 2. vaihtokerta: $1\ \text{USD} = \frac{1}{1{,}3560}\ € = 0{,}73746\ldots\ €$

Dollarin arvo laskee, joten dollari devalvoitui.

Valuuttakurssien suhde on

$$\frac{0{,}73746\ldots\ €}{0{,}80801\ldots\ €} = 0{,}9126\ldots \approx 91{,}3\ \%$$

Valuuttakurssien suhde on a-kohdan käänteisluku:
$\frac{1{,}2376\ \text{USD}}{1{,}3560\ \text{USD}} = 0{,}9126$

Dollarin devalvaatioprosentti on $100\ \% - 91{,}3\ \% = 8{,}7\ \%$.

VASTAUS

a) Euro revalvoitui 9,6 %. b) Dollari devalvoitui 8,7 %.

ESIMERKKI 4 Yritys tuo Argentiinasta kahvia. Jos euro revalvoituu suhteessa pesoon 20 %, niin kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan kahvin kilohinta muuttuu euroina?

RATKAISU Merkitään Argentiinan peson valuuttakurssia ennen revalvaatiota kirjaimella a.

$$1\ € = a \text{ pesoa}$$

Euro revalvoituu 20 % eli yhdellä eurolla saa 20 % enemmän pesoja.

Uusi valuuttakurssi on

$$1\ € = 1{,}2 \cdot a \text{ pesoa}$$

Kahvin hinta Argentiinassa ei muutu mihinkään, joten merkitään sitä kirjaimella b (pesoa).

Kootaan tarvittavat tiedot taulukkoon.

	Ennen revalvaatiota	**Revalvaation jälkeen**
kurssi	$1\ € = a$ pesoa	$1\ € = 1{,}2 \cdot a$ pesoa
kahvin kilohinta (peso)	b	b
kahvin kilohinta (€)	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{1{,}2a} = \frac{1}{1{,}2} \cdot \frac{b}{a}$ $= 0{,}833\ldots \frac{b}{a}$

Kahvin kilohinta ravalvaation jälkeen on siis 83,3… % ≈ 83 % alkuperäisestä kilohinnasta.

Kilohinta euroina laski siis 100 % – 83 % = 17 %.

VASTAUS Kahvin kilohinta euroina laski 17 %.

Tehtäviä

Käytä tehtävissä sivun 102 valuuttakursseja. Rahasummien pyöristykset voi tehdä normaalien pyöristyssääntöjen mukaan.

Valuutta-kurssit

157. Kuinka paljon saa 25 eurolla
   a) Thaimaan bahteja
   b) Sveitsin frangeja
   c) Ruotsin kruunuja?

158. Kuinka paljon euroja saa
   a) 1500 Japanin jenillä
   b) 1800 Ruotsin kruunulla
   c) 850 Englannin punnalla?

159. Kirsti on lähdössä maailmanympärysmatkalle. Hän on ajatellut vierailla ainakin Ruotsissa, Australiassa ja Yhdysvalloissa. Kirsti vaihtaa osan matkarahoista oikeaksi valuutaksi jo Suomessa. Hän aikoo vaihtaa 120 € Ruotsin kruunuiksi, 450 € Australian dollareiksi ja 500 € USA:n dollareiksi. Kuinka paljon Kirsti saa kutakin valuuttaa?

E1 160. Japanilainen turisti käy vaihtamassa Suomeen tultuaan 100 000 Japanin jeniä euroiksi.
   a) Kuinka paljon euroja hän saa?
   b) Ennen Suomesta lähtöä hän vaihtaa jäljelle jääneet 136,50 € takaisin Japanin jeneiksi. Kuinka paljon jenejä turisti saa?

161. Selvitä, mitkä ovat sivun 101 valuuttakurssien arvot tänä päivänä.
   a) Kuinka paljon enemmän/vähemmän 200 eurolla saa tänä päivänä Yhdysvaltojen dollareita?
   b) Kuinka paljon enemmän/vähemmän 700 Ruotsin kruunulla saa tänä päivänä euroja?

162. Hanna palasi lomamatkaltaan Englannista. Hänellä oli mukanaan 226 puntaa, jotka hän vaihtoi Suomessa takaisin euroiksi. Valuutanvaihtopiste peri valuutanvaihdosta 1,2 % vaihtopalkkion. Kuinka paljon euroja Hanna sai?

E2 163. Sveitsiläinen liikemies matkusti Suomen kautta Ruotsiin liikematkalle. Välilaskullaan hän vaihtoi Suomessa 650 Sveitsin frangia Ruotsin kruunuiksi. Kuinka paljon kruunuja liikemies sai, kun rahanvaihdosta ei peritty välityspalkkiota?

164. David vaihtoi Suomeen tultuaan matkakassansa euroiksi. Davidilla oli mukanaan seuraavat määrät eri valuuttoja: 145 USD, 50 SEK ja 5430 THB.
a) Kuinka paljon David sai euroja?
b) David päätti vaihtaa saamistaan euroista 20 % Englannin punniksi. Kuinka paljon puntia David sai?

165. Julia oli lähdössä kiertomatkalle Eurooppaan. Hän vaihtoi ennen Suomesta lähtöä yhteensä 250 € Ruotsin kruunuiksi, Tanskan kruunuiksi ja Turkin liiroiksi. Julia sai Ruotsin kruunuja 767,20 SEK ja Tanskan kruunuja 873,60 DKK. Kuinka paljon Julia sai Turkin liiroja? Käytä alla olevia valuuttakursseja.

Valuutta	Myynti	Osto
Ruotsin kruunu (SEK)	9,5923	10,044
Tanskan kruunu (DKK)	7,2855	7,6015
Turkin liira (TRY)	1,8566	2,2316

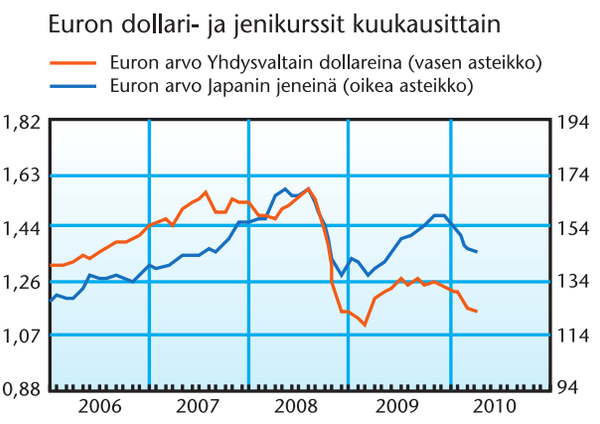
166. Kaisa vaihtoi pankissa 120 € Ruotsin kruunuiksi. Hän sai 1066,50 kruunua. Mikä oli kruunun myyntikurssi?

167. Amerikkalaiset turistit Brian ja Pamela saapuivat lomamatkalle Suomeen. He aikoivat kumpikin vaihtaa 150 dollaria euroiksi. Brian vaihtoi dollarinsa vaihtopisteessä, jossa dollarin ostokurssi oli 1,1754. Pamela vaihtoi dollarinsa vaihtopisteessä, joka peri 5 €:n välityspalkkion rahanvaihdosta. Mikä tulisi dollarin ostokurssin Pamelan vaihtopisteessä olla, jotta hän saisi yhtä paljon euroja kuin Brian?

168. Selvitä, kuinka paljon yksi euro on a) Saksan markkoina b) Espanjan pesetoina c) Ranskan frangeina.

Revalvaatio ja devalvaatio

169. Kuvaajassa on kuvattu euron kurssin muutosta suhteessa Yhdysvaltojen dollariin ja Japanin jeniin vuosina 2005–2009. Milloin kuvaajan perusteella euron kurssi
a) dollaria vastaan on kaikkein heikoin
b) jeniä vastaan on kaikkein vahvin?



170. Seuraavassa taulukossa on muutamia valuuttakursseja.

	2007	2009
Norjan kruunu (NOK)	7,8233	7,2756
Tsekin koruna (CZK)	35,047	31,577
Singaporen dollari (SGD)	1,6126	1,8199

a) Minkä valuuttojen suhteen euro on revalvoitunut ja minkä devalvoitunut?
b) Mistä maista olisi kannattanut matkustaa Suomeen ennemmin vuonna 2007 kuin vuonna 2009?

E3 171. Laske seuraavien valuuttojen devalvaatio- ja revalvaatioprosentit suhteessa euroon.
a) alussa: 1 € = 106,92 JPY (Japanin jeni)
lopussa: 1 € = 124,39 JPY
b) alussa: 1 € = 3,72 LTL (Liettuan litas)
lopussa: 1 € = 3,45 LTL
c) alussa: 1 HUF (Unkarin forintti) = 0,0038 €
lopussa: 1 HUF = 0,0042 €

172. Steen teki kaksi lomamatkaa Suomeen. Hän vaihtoi Tanskan kruunuja euroiksi. Ensimmäisellä kerralla hän sai yhdellä Tanskan kruunulla 0,1325 euroa. Toisella kerralla yhdellä kruunulla sai 0,1567 euroa. Oliko euro revalvoitunut vai devalvoitunut suhteessa Tanskan kruunuun? Kuinka monta prosenttia?

E4 173. Euro devalvoitui 5 % suhteessa Etelä-Afrikan randiin (ZAR). Kuinka monta prosenttia muuttui Etelä-Afrikasta tuotavan viinin litrahinta euroina?

174. Sallan villa Oy myy ruotsalaiselle yritykselle neulepaitoja 55 €:n kappalehintaan. Neulepaidoissa tarvittavien lankojen hinnat nousivat, joten Sallan villa Oy nosti paitojen hintoja 3,0 %. Juuri ennen joulumarkkinoita Ruotsin kruunu devalvoitui 2,5 % suhteessa euroon. Laske neulepaitojen uusi hinta kruunuina, kun Ruotsin kruunun kurssi ennen devalvaatiota oli 1 € = 9,22 SEK.

Sekalaisia tehtäviä

175. Ronja matkusti kesälomamatkallaan Kreikkaan, Saksaan ja Sveitsiin. Hän varasi rahaa jokaista maata varten 100 €. Ronja vaihtoi tarvitsemansa valuutat Suomessa ennen lähtöään.
   a) Kuinka paljon mitäkin valuuttaa Ronja otti mukaansa?
   b) Palatessaan matkaltaan takaisin Suomeen Ronjalla oli mukanaan 50 Sveitsin frangia, jotka hän vaihtoi takaisin euroiksi. Kuinka paljon euroja Ronja sai?

176. Eerolla oli 175 Englannin puntaa ja 6240 Japanin jeniä. Hän vaihtoi rahat Suomessa Ruotsin kruunuiksi. Kuinka paljon kruunuja Eero sai?

177. Suomen, kuten muidenkin euromaiden, valuutta on vuoden 1999 alusta lukien ollut euro. Euromaiden ulkopuolisten valuuttojen viralliset noteeraukset lasketaan euron suhteen, ja ne ilmoittavat euron arvon kyseisinä valuuttoina. Taulukossa on euron kurssin noteerauksia Yhdysvaltain ja Japanin valuuttoina.

Ulkomaan valuuttoja	Euron kurssi (EUR)	
	11.1.1999	12.7.1999
Yhdysvaltain dollari	1,1569 USD	1,0124 USD
Japanin jeni	126,33 JPY	123,82 JPY

Määritä dollarin ja jenin kurssit euroina ilmoitettuina ja laske, kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan nämä kurssit ovat muuttuneet taulukon aikavälillä. [S2000, 2]

178. Puolan zloty devalvoitui 16 % euroon nähden. Kuinka monta prosenttia muuttuu suomalaisen turistin saama zlotyjen määrä?

179. Yritys tuo Etelä-Koreasta kenkiä Suomeen. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan kenkien hinta muuttuu euroina, kun euro a) devalvoituu b) revalvoituu suhteessa Etelä-Korean woniin 4,5 %?

5.2 Indeksilaskenta

POHDINTA 1 Täydennä taulukot ja vastaa kysymyksiin.

Vuosi	Appelsiinien keskimääräinen kilohinta (€)	Kuinka monta prosenttia kilohinta on vuoden 2006 hinnasta?
2006	1,52	$\frac{1{,}52}{1{,}52} = 1 = 100{,}0\ \%$
2007	1,55	
2008	1,54	
2009	1,42	

Lähde: Tilastokeskus

Kuinka monta prosenttia pienempi appelsiinien kilohinta oli vuonna 2009 kuin vuonna 2006?

Vuosi	Appelsiinien keskimääräinen kilohinta (€)	Kuinka monta prosenttia kilohinta on vuoden 2009 hinnasta?
2006	1,52	
2007	1,55	
2008	1,54	
2009	1,42	

Lähde: Tilastokeskus

Kuinka monta prosenttia suurempi appelsiinien kilohinta oli vuonna 2006 kuin vuonna 2009?

Indeksin käsite

Tarkastellaan erään hampurilaisaterian hintaa ja hinnan muutosta viiden vuoden ajalta.

Vuosi	Aterian hinta (€)	Hinta prosentteina verrattuna vuoden 2006 hintaan	Muutos vuoteen 2006 verrattuna
2006	5,60	$\frac{5{,}60\,€}{5{,}60\,€} = 1 = 100{,}0\,\%$	
2007	5,50	$\frac{5{,}50\,€}{5{,}60\,€} = 0{,}9821\ldots \approx 98{,}2\,\%$	Ateria on 1,8 % halvempi.
2008	5,90	$\frac{5{,}90\,€}{5{,}60\,€} = 1{,}0535\ldots \approx 105{,}4\,\%$	Ateria on 5,4 % kalliimpi.
2009	5,65	$\frac{5{,}65\,€}{5{,}60\,€} = 1{,}0089\ldots \approx 100{,}9\,\%$	Ateria on 0,9 % kalliimpi.
2010	5,75	$\frac{5{,}75\,€}{5{,}60\,€} = 1{,}0267\ldots \approx 102{,}7\,\%$	Ateria on 2,7 % kalliimpi.

Se, kuinka paljon hintojen suhde (prosentteina) poikkeaa 100 %:sta, kertoo kuinka paljon hinta on muuttunut vuoteen 2006 verrattuna.

- Jos hintojen suhde on yli 100 %, hinta on noussut.
- Jos hintojen suhde on alle 100 %, hinta on vähentynyt.

Koska hampurilaisaterian hinnan tarkastelussa kaikkia hintoja verrattiin vuoden 2006 hintaan, sanotaan vuoden 2006 olevan **perusajankohta**.

Kun pelkät prosenttiluvut ilman prosenttimerkkiä kootaan omaan taulukkoon, saadaan aikasarja, joka kuvaa hinnan suhteellista muutosta perusajankohtaan (eli vuoteen 2006) verrattuna. Tällaista aikasarjaa kutsutaan **indeksisarjaksi** eli **indeksiksi**.

Indeksilukujonon yhtä lukua kutsutaan **indeksin pisteluvuksi**. Tämä ilmoitetaan yleensä yhden desimaalin tarkkuudella. Indeksin pisteluvun avulla kuvataan suureen suhteellista muutosta verrattavaan tilanteeseen eli perusajankohtaan verrattuna. Indeksit ovat siis prosenttilukuja, jotka kirjoitetaan näkyviin ilman %-merkkiä.

Vuosi	2006	2007	2008	2009	2010
hampurilaisaterian hintaindeksi (2006 = 100)	100,0	103,6	75,0	82,1	92,9

Perusajankohta ilmoitetaan aina indeksien yhteydessä. Tässä perusajankohtana on vuosi 2006.

Perusajankohdan indeksipiste on aina 100.

Indeksin pisteluvut ovat samat kuin vastaavat prosenttiluvut ilman prosenttimerkkiä. Kaikki arvot on ilmoitettu yleensä yhdellä desimaalilla.

ESIMERKKI 1

Seuraavaan taulukkoon on koottu maidon tammikuun litrahinnat vuosilta 2007–2010 (Lähde: Tilastokeskus).

	2007	2008	2009	2010
maidon hinta (€/litra)	0,72	0,82	0,90	0,85

Muodosta taulukon perusteella maidon hinnan kehitystä kuvaava indeksisarja, kun perusajankohtana on vuosi 2008. Laske indeksisarjan avulla, kuinka monta prosenttia maidon hinta on muuttunut vuonna 2010 vuoteen

a) 2008 verrattuna b) 2009 verrattuna.

c) Piirrä indeksisarjan kuvaaja.

RATKAISU

Perusajankohtana on vuosi 2008 eli verrataan maidon hintoja vuoden 2008 hintaan 0,82 €/l.

	2007	2008	2009	2010
maidon hinta (€/litra)	0,72	0,82	0,90	0,85
hintasuhde	$\frac{0{,}72}{0{,}82} = 0{,}8780\ldots$	$\frac{0{,}82}{0{,}82} = 1$	$\frac{0{,}90}{0{,}82} = 1{,}0975\ldots$	$\frac{0{,}85}{0{,}82} = 1{,}0365\ldots$
indeksi	87,8	100,0	109,8	103,7

a) Maidon hintaa verrataan perusajankohtaan, joten muutos saadaan suoraa indeksin avulla.

103,7 % – 100,0 % = 3,7 %

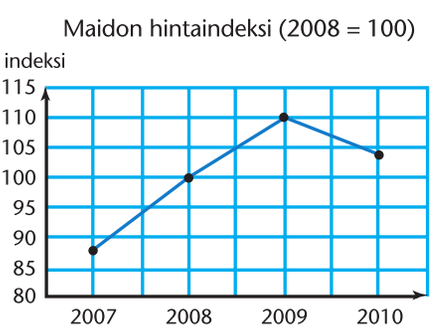
Vuoden 2010 hintaindeksi on 103,7 eli maidon hinta on noussut 3,7 %.

b) Lasketaan hinnan muutos indeksien avulla. Verrataan vuoden 2010 hintaindeksiä (103,7) vuoden 2009 hintaindeksiin (109,8).

$$\frac{103{,}7}{109{,}8} = 0{,}9444\ldots \approx 94{,}4\ \%$$

Maidon hinta on laskenut 100 % – 94,4 % = 5,6 %.

c) Merkitään indeksipisteet koordinaatistoon ja yhdistetään pisteet viivalla. Näin saadaan maidon hintaindeksin kehitystä kuvaava trendikäyrä.



VASTAUS

a) Maidon hinta on noussut 3,7 %.

b) Maidon hinta on laskenut 5,6 %.

Ryhmäindeksit

Monissa tilanteissa indeksien avulla tarkastellaan useamman kuin yhden suureen arvon muutosta. Indeksi voi esimerkiksi kuvata useamman tuotteen hinnan yhteiskehitystä. Tällöin indeksiä kutsutaan **ryhmäindeksiksi**.

Tarkastellaan esimerkiksi kasvissosekeiton hinnan muutosta keittoon tarvittavien raaka-aineiden hintojen avulla. Taulukkoon on koottu keittoon tarvittavien raaka-aineiden määrät sekä hinnat vuosina 2008–2010.

	Määrä	2008	2009	2010
porkkana	1,20 kg	1,04 €/kg	1,15 €/kg	0,92 €/kg
peruna	0,70 kg	0,70 €/kg	0,79 €/kg	0,65 €/kg
sipuli	0,30 kg	0,94 €/kg	1,08 €/kg	0,80 €/kg

Lasketaan keiton hinta raaka-aineiden määrien ja kilohintojen avulla.

- 2008 : $1{,}20 \cdot 1{,}04\ € + 0{,}70 \cdot 0{,}70\ € + 0{,}3 \cdot 0{,}94\ € = 2{,}02\ €$
- 2009: $1{,}20 \cdot 1{,}15\ € + 0{,}70 \cdot 0{,}79\ € + 0{,}3 \cdot 1{,}08\ € = 2{,}257\ €$
- 2010: $1{,}20 \cdot 0{,}92\ € + 0{,}70 \cdot 0{,}65\ € + 0{,}3 \cdot 0{,}80\ € = 1{,}799\ €$

Keiton hintojen avulla voidaan nyt muodostaa hintaa kuvaava ryhmäindeksi. Valitaan perusvuodeksi vuosi 2008.

	2008	2009	2010
keiton hintasuhde	$\frac{2{,}02\,€}{2{,}02\,€} = 1$	$\frac{2{,}257\,€}{2{,}02\,€} = 1{,}1173\ldots$	$\frac{1{,}799\,€}{2{,}02\,€} = 0{,}8905\ldots$
indeksi (2008 = 100)	100	111,7	89,1

$111{,}7 - 100 = 11{,}7$

Hinta on noussut 11,7 %.

$\frac{89{,}1}{111{,}7} = 0{,}7976\ldots$

Hinta on laskenut
$1 - 0{,}7976\ldots = 0{,}2023\ldots \approx 20{,}2$ %.

Ryhmäindeksi lasketaan usein edellä kuvatulla tavalla painotettuna keskiarvona.

Yksi tärkeimmistä ryhmäindekseistä on **kuluttajahintaindeksi**. Kuluttajahintaindeksi kuvaa Suomessa asuvien kotitalouksien Suomesta ostamien tavaroiden ja palveluiden hintakehitystä. Indeksin laskemisessa käytetään niin sanottua Laspeyresin hintaindeksikaavaa, jonka mukaan indeksi lasketaan painottamalla eri hyödykkeiden hintoja niiden kulutusosuuksilla.

Kuluttajahintaindeksin arvo julkaistaan joka kuukauden puolivälissä. Indeksin laskemista varten Tilastokeskuksen haastattelijat keräävät noin 50 000 hintatietoa noin 497 hyödykkeestä ja noin 2700 liikkeestä. Suomessa kuluttajahintaindeksiä on laskettu vuodesta 1921 lähtien.

Kuluttajahintaindeksin hyödykekoria ja painorakennetta tarkistetaan aina silloin tällöin. Tällöin indeksille asetetaan aina uusi perusvuosi. Perusvuosia ovat olleet esimerkiksi vuodet 1995, 2000 ja 2005.

	Kuluttajahintaindeksi	
	(2000 = 100)	(2005 = 100)
2005	106,2	100
2006	108,1	101,6
2007	110,8	104,1
2008	115,3	108,3
2009	115,3	108,3

ESIMERKKI 2

Vuoden 2006 kuluttajahintaindeksin painoarvot ja indeksipisteet (2005 = 100) eri hyödykeryhmille on koottu seuraavaan taulukkoon.

Hyödykeryhmä	Painoarvo	Pisteluku
1. elintarvikkeet ja alkoholittomat juomat	133,4	101,36
2. alkoholijuomat ja tupakka	51,6	100,93
3. vaatetus ja jalkineet	50,0	98,24
4. asuminen, vesi, sähkö ja muut	213,4	104,42
5. kalusteet, kotitalouskoneet ja kodinhoito	55,4	100,64
6. terveys	47,8	100,48
7. liikenne	146,2	102,28
8. viestintä	34,8	92,22
9. kulttuuri- ja vapaa-aika	120,4	99,84
10. koulutus	5,0	101,83
11. ravintolat ja hotellit	69,1	102,07
12. muut tavarat ja palvelut	72,9	103,09

Laske kuluttajahintaindeksin pisteluku vuonna 2006.

RATKAISU

Indeksi lasketaan painoarvojen mukaan painotettuna keskiarvona.

1. Hyödykeryhmän pisteluku kerrotaan ryhmän painoarvolla.
2. Näin saadut tulot lasketaan yhteen.
3. Summa jaetaan kaikkien painoarvojen summalla.

Hyödyke-ryhmä	Painoarvo	Pisteluku	Painoarvo · pisteluku
1.	133,4	101,36	133,4 · 101,36 = 13 521,424
2.	51,6	100,93	51,6 · 100,93 = 5207,988
3.	50,0	98,24	50,0 · 98,24 = 4912,0
4.	213,4	104,42	213,4 · 104,42 = 22 283,228
5.	55,4	100,64	55,4 · 100,64 = 5575,456
6.	47,8	100,48	47,8 · 100,48 = 4802,944
7.	146,2	102,28	146,2 · 102,28 = 14 953,336
8.	34,8	92,22	34,8 · 92,22 = 3209,256
9.	120,4	99,84	120,4 · 99,84 = 12 020,736
10.	5,0	101,83	5,0 · 101,83 = 509,15
11.	69,1	102,07	69,1 · 102,07 = 7053,037
12.	72,9	103,09	72,9 · 103,09 = 7515,261
yhteensä	1000		101 563,816

Kuluttajahintaindeksin pisteluku on

$$\frac{101\,563{,}816}{1000} = 101{,}563\ldots \approx 101{,}6$$

VASTAUS

Kuluttajahintaindeksin pisteluku vuonna 2006 oli 101,6.

ESIMERKKI 3

Vuoden 2005 kuluttajahintaindeksissä elintarvikkeiden painoarvo on 133,4 ja kaikkien painoarvojen summa 1000.

a) Kuluttajahintaindeksin painorakennetta muutetaan niin, että elintarvikkeiden painoarvo nousee 3,5 %, muiden painoarvojen pysyessä samana. Laske uuden kuluttajahintaindeksin arvo.

b) Kuinka paljon pitäisi elintarvikkeiden painoarvon nousta, jotta kuluttajahintaindeksi nousisi 2 pisteellä?

RATKAISU

Kuluttajahintaindeksi mittaa kulutuksen määrää. Koska painoarvojen summa on 1000, merkitään kokonaiskulutusta vuonna 2005 merkinnällä $1000a$.

- Vuonna 2005 elintarvikkeiden painoarvo on 133,4. Tällöin elintarvikkeiden osuus kokonaiskulutuksesta on $133{,}4a$ (€).
- Muihin hyödykeryhmiin kuluu $1000a - 133{,}4a = 866{,}6a$ (€).

a) Elintarvikkeiden painoarvo nousee 3,5 %, joten elintarvikkeisiin kulutetaan painoarvon nousun jälkeen

$$1{,}035 \cdot 133{,}4a = 138{,}069a \text{ (€)}$$

Muiden hyödykeryhmien painoarvot pysyvät samoina, joten niiden kulutus on edelleen $866{,}6a$ euroa.

Kulutuksen määrä elintarvikkeiden painoarvon muutoksen jälkeen

$$138{,}069a + 866{,}6a = 1004{,}669a \text{ (€)}$$

Lasketaan kuinka monta prosenttia uusi kulutus on vanhasta kulutuksesta.

$$\frac{1004{,}669a}{1000a} = 1{,}004669 \approx 100{,}5$$

Kuluttajahintaindeksin uusi arvo on siis 100,5.

b) Elintarvikkeiden kulutus k-kertaistuu, jolloin uusi kulutus on $k \cdot 133{,}4a$. Muiden hyödykeryhmien kulutus säilyy samana eli muun kulutuksen määrä on $866{,}6a$.

Kokonaiskulutus yhteensä $133{,}4ka + 866{,}6a$.

Kuluttajahintaindeksi nousee 2 pistettä eli uusi indeksi on 102. Saadaan siis yhtälö

$$\frac{133{,}4ka + 866{,}6a}{1000a} = 1{,}02$$

$$\frac{(133{,}4k + 866{,}6)\cancel{a}}{1000\cancel{a}} = 1{,}02 \qquad \big| \cdot 1000$$

Otetaan a yhteiseksi tekijäksi ja supistetaan.

$$133{,}4k + 866{,}6 = 1020$$

$$133{,}4k = 153{,}4 \qquad \big| : 133{,}4$$

$$k = 1{,}14992\ldots \approx 115{,}0\ \%$$

Elintarvikkeiden painoarvon on siis noustava 15,0 %.

VASTAUS a) 100,5 b) 15,0 %

Tehtäviä

Indeksin käsite

180. Seuraavaan taulukkoon on koottu lenkkimakkaran kilohintoja vuosilta 2007–2010.

	2007	2008	2009	2010
lenkkimakkara (€/kg)	3,36	3,53	4,02	3,55

Muodosta lenkkimakkaran hintaindeksisarja, kun perusvuotena on vuosi a) 2007 b) 2010.

181. Uimahallimaksujen keskihinnat vuosina 2007–2010 on koottu seuraavaan taulukkoon.

	2007	2008	2009	2010
uimahallimaksu (€)	4,38	4,50	4,55	4,80

Muodosta uimahallimaksuja kuvaava indeksisarja, kun perusajankohtana on vuosi 2008. Kuinka monta prosenttia uimahallimaksu oli muuttunut vuonna 2010 vuoteen
a) 2008 verrattuna
b) 2007 verrattuna?
c) Piirrä indeksisarjan kuvaaja.

E1 182. Muodosta bensiinin hinnan kehitystä kuvaava indeksisarja (2007 = 100).

	2007	2008	2009	2010
bensiini 95E (€/litra)	1,18	1,42	1,16	1,36

Laske indeksisarjan avulla, kuinka monta prosenttia bensiinin hinta on muuttunut
a) vuonna 2010 vuoteen 2007 verrattuna
b) vuonna 2009 vuoteen 2008 verrattuna.
c) Piirrä indeksisarjan kuvaaja.

183. Taulukkoon on koottu 200 km:n meno–paluu-matkojen hintoja. Muodosta junamatkan ja linja-automatkan hinnan kehitystä kuvaavat indeksisarjat (2006 = 100).

	2002	2004	2006	2008	2010
junamatka(€)	43,60	47,20	48,80	51,00	59,40
linja-automatka (€)	41,30	42,90	47,60	48,80	51,30

a) Piirrä indeksisarjojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.
b) Kummalla kulkuvälineellä kuljetun matkan hinta on muuttunut suhteessa enemmän aikavälillä 2006–2010?
c) Kuinka monta prosenttia juna- ja linja-automatkan hinta on muuttunut vuonna 2010 vuoteen 2004 verrattuna?

184. Taulukkoon on koottu yritysten henkilöstön määrää ja liikevaihtoa kuvaavat indeksit vuosilta 2004–2010.

	Henkilöstö	Liikevaihto
2004	100	100
2005	82,0	82,4
2006	73,0	88,8
2007	78,4	101,0
2008	85,9	117,6
2009	90,5	138,9
2010	91,5	139,3

a) Piirrä indeksisarjojen kuvaajat samaan koordinaatistoon ja tulkitse henkilöstön määrän ja liikevaihdon vaikutusta toisiinsa.
b) Muodosta yritysten henkilöstön määrää ja liikevaihtoa kuvaavien indeksien avulla uusi indeksisarja, joka kuvaa, miten liikevaihto suhteessa henkilöiden määrään on muuttunut.

185. Taulukkoon on koottu kuukausivuokrien kehitys vuosina 2005–2009 arava ja vapaarahoitteisille asunnoille.

€/m²/kk	2005	2006	2007	2008	2009
aravahuoneistot	7,54	7,68	7,96	8,58	8,93
vapaarahoitteiset asunnot	8,81	8,93	9,35	9,73	10,07

a) Muodosta hinnan kehitystä kuvaavat indeksisarjat (2005 = 100) ja piirrä indeksisarjojen kuvaajat samaan koordinaatistoon.
b) Kumman asuntotyypin kuukausivuokra neliötä kohti on indeksisarjojen perusteella noussut suhteessa enemmän vuosina 2006–2009?

Ryhmä-indeksi

186. Helmin kahvilassa kuluu päivän aikana keskimäärin 13,2 litraa maitoa, 5,0 kg kahvia ja 2,8 kiloa sokeria. Muodosta maidon, kahvin ja sokerin hintojen avulla ”Helmin kahvilan indeksi”, joka kuvaa kahvilan kustannusten kehitystä, kun perusvuotena on vuosi 1980.

	Yksikkö	1980	1990	2000	2010
maito	€/l	0,36	0,67	0,63	0,85
kahvipaketti	€/500 g	2,60	2,52	3,07	2,79
hienosokeri	€/kg	1,00	1,28	1,12	0,97

Jos kustannusten nousu siirretään suoraan myyntihintoihin, niin kuinka paljon Helmin kahvilan hinnat ovat muuttuneet
a) vuodesta 1990 vuoteen 2000
b) vuonna 2010 vuodesta 2000?

E2 187. Vuoden 2009 kuluttajahintaindeksin painoarvot ja indeksipisteet (2005 = 100) eri hyödykeryhmille on koottu seuraavaan taulukkoon.

Hyödykeryhmä	Painoarvo	Pisteluku
1. elintarvikkeet ja alkoholittomat juomat	133,4	114,62
2. alkoholijuomat ja tupakka	51,6	116,77
3. vaatetus ja jalkineet	50,0	99,63
4. asuminen, vesi, sähkö ja muut	213,4	113,12
5. kalusteet, kotitalouskoneet ja kodinhoito	55,4	105,67
6. terveys	47,8	105,17
7. liikenne	146,2	102,17
8. viestintä	34,8	92,06
9. kulttuuri- ja vapaa-aika	120,4	102,80
10. koulutus	5,0	113,05
11. ravintolat ja hotellit	69,1	114,99
12. muut tavarat ja palvelut	72,9	109,71

Laske kuluttajahintaindeksin pisteluku vuonna 2009.

188. Paavo harrastaa elokuvien katselua. Elokuvateatteriin mennessään hän ostaa joka kerta keskimäärin 150 g irtomakeisia.

	2007	2008	2009	2010
elokuvalipun keskihinta	8,55 €	8,66 €	9,05 €	9,44 €
irtomakeisten kilohinta	7,13 €	7,14 €	7,21 €	7,18 €

Lähde: Tilastokeskus

Muodosta Paavon elokuvaharrastukseen kuluvaa kokonaisrahamäärää kuvaava indeksisarja (2007 = 100), kun Paavo käy katsomassa vuosittain 25 elokuvaa. Kuinka monta prosenttia Paavon harrastusmenot ovat muuttuneet tarkastelun aikana?

E3 189. Vuoden 2005 kuluttajahintaindeksissä asumisen painoarvo on 213,4 ja kaikkien painoarvojen summa on 1000. Laske uusi kuluttajahintaindeksin arvo, jos asumisen painoarvo laskee 4,5 % muiden painoarvojen pysyessä samana. Kuinka paljon pitäisi asumisen painoarvon laskea, jotta kuluttajahintaindeksi laskisi 3,5 pisteellä?

190. Yksinkertainen ”ruokakori” koostuu viidestä tuotteesta, joiden osuudet on lueteltu seuraavassa taulukossa. Eräiden tuotteiden hinnat nousevat, eräiden laskevat taulukon mukaisesti.

Tuote	Osuus korissa	Hinnanmuutos
A	35 %	+2,0 %
B	25 %	–1,0 %
C	20 %	+4,4 %
D	14 %	–5,8 %
E	6 %	+6,2 %

Laske ruokakorin hinnanmuutos. [K1993, 7c]

Sekalaisia tehtäviä

191. Muodosta Ullan asunnon vuokraa kuvaava indeksisarja (2005 = 100).

	2005	2006	2007	2008
vuokra (€/kk)	380	395	408	450

Vastaa indeksisarjan perusteella seuraaviin kysymyksiin.

a) Kuinka monta prosenttia vuokra on noussut tarkasteluaikana?

b) Kuinka monta prosenttia korkeampi vuokra on vuonna 2008 kuin vuonna 2006?

192. Taulukkoon on koottu asuinhuoneistojen määrät ja huoneistokohtaiset pinta-alat vuosilta 1960–2000. Muodosta kumpaakin suuretta kuvaavat indeksisarjat (1960 = 100) ja piirrä indeksisarjojen kuvaajat samaan koordinaatistoon. Mitä voit kuvaajan perusteella todeta?

	Yksikkö	1960	1970	1980	1990	2000
asuinhuoneistot	1000	1211	1463	1838	2210	2512
pinta-ala huoneistoa kohti	m^2	51	60	69	74	77

193. Leipuri Hiiva muodosti leipomon raaka-aineiden avulla oman indeksinsä, jonka avulla hän seurasi leipomonsa hintojen kehitystä. Hän laski indeksin arvon vuosittain. Indeksin arvo muodostui ostoskorista, joka sisälsi 2,5 kg kananmunia, 12 litraa maitoa, 3 kg voita, 20 kg vehnäjauhoja ja 4 kg sokeria.

	Yksikkö	2006	2007	2008	2009
munat	€/kg	2,45	2,74	3,00	2,99
maito	€/l	0,73	0,72	0,87	0,89
voi	€/500 g	2,44	2,39	2,88	2,29
vehnäjauhot	€/2 kg	0,82	0,83	1,19	1,21
hienosokeri	€/kg	1,05	1,02	1,02	1,01

a) Muodosta leipuri Hiivan indeksisarja vuosille 2006–2009, kun perusvuotena on vuosi 2006.

b) Kuinka paljon leipuri Hiivan tulisi nostaa tuotteidensa hinto- ja vuonna 2009 vuoden 2006 hinnoista?

194. Maanteiden roskatutkimuksen mukaan eri materiaalien osuus koko roskamäärästä on seuraava: lasi 2,7 %, metalli 7,6 %, muovi 17,7 %, paperi 64,3 % ja muut 7,7 %. Kuinka monta prosenttia koko roskamäärä pienenisi, jos roskapaperin määrä saataisiin pienenemään puoleen ja muovin määrä kahteen kolmasosaan? [S1986, 3b]

5.3 Inflaatio ja rahan arvo

POHDINTA 1

Taulukkoon on koottu muutamia kuluttajahintaindeksin arvoja.

Vuosi	Kuluttajahintaindeksi
1995	100,0
1997	101,8
2004	113,8
2008	124,4

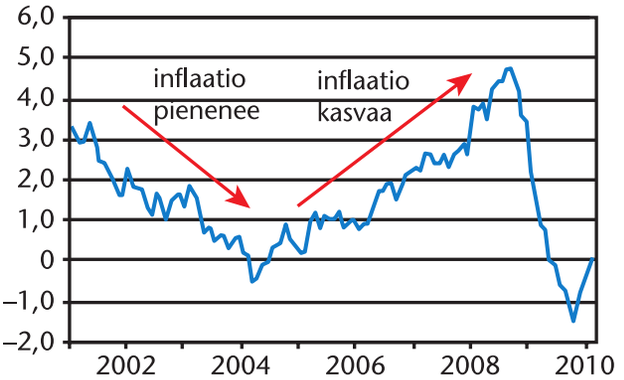
a) Aleksi osti 850 €:n hintaisen television vuonna 2008. Kuinka paljon vastaava televisio olisi maksanut vuonna 2004, jos hinta muuttuu samassa suhteessa kuin kuluttajahintaindeksi?

b) Ella osti vuonna 1997 tietokoneen 15 400 markalla. Kuinka paljon tietokone maksaisi vuoden 2008 rahassa?
1 € = 5,94573 mk

Inflaatio ja deflaatio

Klassisen taloustieteen mukaan **inflaatio** tarkoittaa liikkeellä olevan rahamäärän kasvua suhteessa markkinoilla oleviin hyödykkeisiin. Kun liikkeellä oleva rahamäärä kasvaa, rahan arvo alenee ja yleinen hintataso nousee. Inflaation suuruutta kuvataan yleisimmin kuluttajahintaindeksillä. Tilastokeskuksen laskema kuluttajahintojen vuosimuutos Suomessa eli inflaatio oli esimerkiksi vuoden 2010 helmikuussa 0,1 %.

Kuluttajahintaindeksi 2001–2010

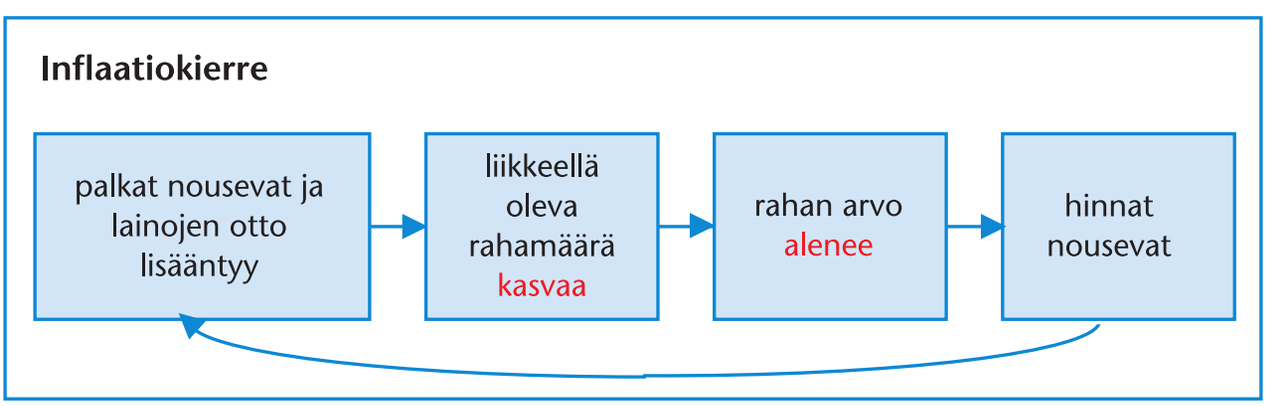


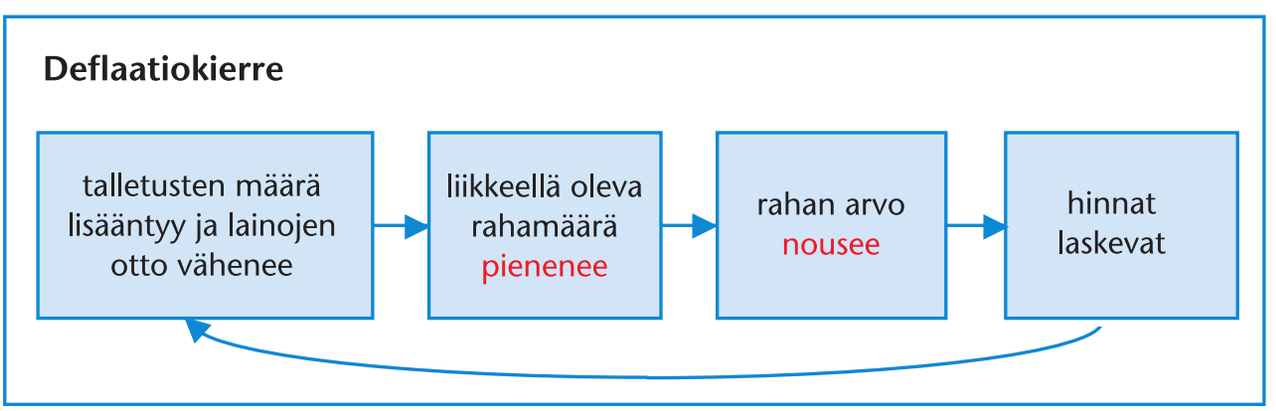
Euroopan unionin talous- ja rahaliitto Emun jäsenmaissa vuosittainen inflaatio pyritään pitämään enintään noin kahden prosentin suuruisena. Työtekijöiden palkkojen ja muiden kustannusten nouseminen aiheuttaa inflaatiota. Hintojen nopeaa kohoamista jarrutetaan esimerkiksi korkotason nostolla. Euroopan keskuspankki EKP voi tarvittaessa nostaa korkotasoa, jolloin kulutus vähenee ja hintojen nousu tästä syystä hidastuu. Kasvava talous tarvitsee kuitenkin sopivaa inflaatiota, sillä ilman inflaatiota ei ole kasvuakaan.

Inflaation vastakohta on **deflaatio**. Klassisen taloustieteen mukaan deflaatiolla tarkoitetaan liikkeellä olevan rahamäärän pienenemistä suhteessa markkinoilla tarjolla oleviin hyödykkeisiin. Deflaatio nostaa rahan arvoa ja laskee kuluttajahintoja.

Deflaatiota esiintyy yleensä lama-aikoina, joten sitä pidetään usein kansantalouden häiriön merkkinä. Deflaatiota voi kuitenkin esiintyä myös nousukaudella, jos liikkeellä oleva rahamäärä kasvaa hitaammin kuin hyödykkeiden tuotanto.

Inflaatio	Liikkeellä olevan rahamäärän kasvu ja rahan arvon aleneminen.
Deflaatio	Liikkeellä olevan rahamäärän pieneneminen ja rahan arvon nouseminen.





ESIMERKKI 1

Seuraavaan taulukkoon on koottu Suomen ja Japanin kuluttajahintaindeksejä (2000 = 100).

	2001	2009
Suomi	102,6	115,3
Japani	99,3	98,1

a) Kuinka suuri on inflaatio-/deflaatioprosentti kummassakin maassa tarkasteltavalla aikavälillä?
b) Kuinka suuri oli Suomen keskimääräinen vuosittainen inflaatio tarkasteltavalla aikavälillä (jos oletetaan vuosittaisen inflaation pysyvän samana)?

RATKAISU

a) Tarkastellaan ensin Suomen kuluttajahintaindeksin muutosta. Verrataan vuoden 2009 indeksiä vuoden 2001 indeksiin.

$$\frac{115{,}3}{102{,}6} = 1{,}1237\ldots \approx 112{,}4\ \%$$

Kuluttajahintaindeksi on kasvanut 112,4 % – 100 % = 12,4 %.

Suomessa on tällöin vuosina 2001–2009 hinnat nousseet 12,4 % eli **Suomen inflaatioprosentti on ollut 12,4 %.**

Tarkastellaan samalla tavalla Japanin tilannetta. Verrataan vuoden 2009 indeksiä vuoden 2001 indeksiin.

$$\frac{98{,}1}{99{,}3} = 0{,}9879\ldots \approx 98{,}8\ \%$$

Kuluttajahintaindeksi on pienentynyt 100 % – 98,8 % = 1,2 %.

Japanissa vuosina 2001–2009 hinnat ovat laskeneet 1,2 % eli **Japanin deflaatioprosentti on ollut 1,2 %.**

Inflaatio ilmoitetaan prosentteina. Jos vuosittainen inflaatio pysyy samana, niin indeksien suhteellinen vuosittainen muutos pysyy samana.

b) Merkitään vuosittaista inflaatiota kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella x. Saadaan yhtälö

Tarkasteluaika 8 vuotta.

$$102{,}6 \cdot x^8 = 115{,}3 \qquad |:102{,}6$$

$$x^8 = 1{,}1237\ldots$$

$$x = \sqrt[8]{1{,}1237\ldots} = 1{,}0146\ldots \approx 101{,}5\ \%$$

Vuosittainen inflaatio oli siis 101,5 % – 100 % = 1,5 %.

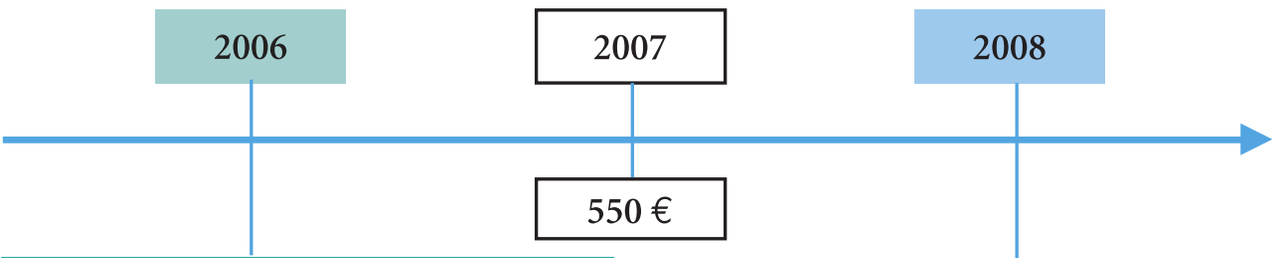
VASTAUS

a) Suomen inflaatioprosentti on 12,4 %, Japanin deflaatioprosentti 1,2 %.
b) Vuosittainen inflaatio on 1,5 %.

Rahan arvo muuttuu esimerkiksi inflaation vaikutuksesta. Tästä syystä monia hintoja sidotaan indekseihin. Näin hintojen muutokset noudattavat yleistä hintojen kehitystä. Indeksejä, joihin rahasummat yleensä sidotaan ovat

- kuluttajahintaindeksi
- elinkustannusindeksi
- rakennuskustannusindeksi.

Tarkastellaan tuotetta, jonka hinta vuonna 2007 oli 550 €.



Tuotteen hinta vuoden 2006 rahassa

Vuosi	Kuluttaja-hintaindeksi (2005 = 100)	Hinta (€)
2006	101,6	x
2007	104,1	550

Indeksien arvot ja tuotteen hinnat ovat suoraan verrannolliset.

$$\frac{101{,}6}{104{,}1} = \frac{x}{550}$$
$$104{,}1x = 55\,880 \quad |:104{,}1$$
$$x = 536{,}791\ldots \approx 537$$

Tuotteen hinta olisi ollut vuonna 2006 noin 537 €.

Deflatointi
– muutetaan tuotteen hinta **aikaisemman** ajankohdan rahaksi.

Tuotteen hinta vuoden 2008 rahassa

Vuosi	Kuluttaja-hintaindeksi (2005 = 100)	Hinta (€)
2007	104,1	550
2008	108,3	y

Indeksien arvot ja tuotteen hinnat ovat suoraan verrannolliset.

$$\frac{104{,}1}{108{,}3} = \frac{550}{y}$$
$$104{,}1y = 59\,565 \quad |:104{,}1$$
$$y = 572{,}190\ldots \approx 572$$

Tuotteen hinta olisi ollut vuonna 2008 noin 572 €.

Inflatointi
– muutetaan tuotteen hinta **myöhemmän** ajankohdan rahaksi.

ESIMERKKI 2

Ismo osti vuonna 2001 asumisoikeusasunnon, jonka asumisoikeusmaksu oli silloin 18 500 €. Maksu sidottiin rakennuskustannusindeksiin (2000 = 100). Vuonna 2009 Ismo muutti pois asumisoikeusasunnosta ja sai näin takaisin maksamansa asumisoikeusmaksun rakennuskustannusindeksillä korotettuna. Kuinka paljon Ismo asunnostaan sai? Rakennuskustannusindeksin pisteluku vuonna 2001 oli 102,5 ja vuonna 2009 pisteluku oli 126,1.

RATKAISU

Merkitään asumisoikeusmaksua vuonna 2009 kirjaimella x. Inflatoidaan vuoden 2001 asumisoikeusmaksu vuoden 2009 rahaksi.

Vuosi	Rakennus-kustannusindeksi	Asumisoikeusmaksu (€)
2001	102,5	18 500
2009	126,1	x

Indeksin pisteluku ja asumisoikeusmaksu ovat suoraan verrannolliset.

$$\frac{102{,}5}{126{,}1} = \frac{18\,500}{x}$$

$$102{,}5x = 2\,332\,850 \qquad |:102{,}5$$

$$x = 22\,759{,}51\ldots$$

$$x \approx 22\,760 \quad (€)$$

VASTAUS

Ismo saa 22 760 €.

Nimellinen ja reaalinen muutos

Erilaisten rahasummien muutoksia voidaan tarkastella nimellisinä muutoksina tai reaalisina muutoksina. Nimelliset ja reaaliset muutokset ilmoitetaan yleensä prosentteina.

Nimellisessä muutoksessa ei huomioida inflaation vaikutusta vaan rahamäärän muutos lasketaan sellaisenaan. Rahamäärillä suoritetaan siis tarvittavat laskutoimitukset välittämättä siitä, että rahamäärät saattavat olla eri ajankohdan rahassa.

Reaalista muutosta laskettaessa otetaan huomioon inflaation vaikutus. Tällä tarkoitetaan sitä, että vertailtavat rahamäärät muutetaan ensin saman ajankohdan rahaksi, joko inflatoimalla tai deflatoimalla, ja rahamäärien vertailu suoritetaan vasta sitten.

ESIMERKKI 3

Nuutti toimii kemian lehtorina. Hänen kuukausipalkkansa vuonna 2006 oli 2410,60 €. Vuonna 2009 hänen kuukausipalkkansa oli 2837,20 €. Laske kuluttajahintaindeksin avulla, kuinka paljon palkka on muuttunut a) nimellisesti b) reaalisesti. Kuluttajahintaindeksi vuonna 2006 oli 101,6 ja vuonna 2009 se oli 108,3.

RATKAISU

a) Nimellisessä muutoksessa ei huomioida inflaation vaikutusta. Verrataan vuoden 2009 palkkaa vuoden 2006 palkkaan.

$$\frac{2837{,}20\ €}{2410{,}60\ €} = 1{,}1769\ldots \approx 117{,}7\ \%$$

Palkka on siis nimellisesti noussut 17,7 %.

Vuosi	Indeksi	Palkka
2006	101,6	2410,60 €
2009	108,3	2837,20 €

b) Ilmoitetaan kuukausipalkat saman ajankohdan rahassa. Inflatoidaan vuoden 2006 palkka vuoden 2009 rahaksi.

Merkitään vuoden 2006 palkkaa vuoden 2009 rahassa kirjaimella x.

$$\frac{101{,}6}{108{,}3} = \frac{x}{2837{,}20\ €}$$

$$108{,}3x = 288\,259{,}52 \qquad |:108{,}3$$

$$x = 2661{,}676\ldots$$

Verrataan vuoden 2009 todellista palkkaa tähän arvoon.

$$\frac{2837{,}20\ €}{2661{,}676\ldots\ €} = 1{,}065944\ldots \approx 106{,}6\ \%$$

Nimelliset ja reaaliset muutokset ilmoitetaan yleensä prosentteina.

Palkka on siis reaalisesti noussut 6,6 %.

VASTAUS

a) Palkka on nimellisesti noussut 17,7 %.
b) Palkka on reaalisesti noussut 6,6 %.

ESIMERKKI 4

Seuraavaan taulukkoon on koottu ravintolasta ostettujen pizzojen keskihintoja.

Vuosi	2002	2004	2006	2008
pizzan keskihinta (€)	7,09	7,63	7,98	8,41
elinkustannusindeksi (1951 = 100)	1563	1580	1622	1730

Lähde: Tilastokeskus

a) Deflatoi pizzan keskihinnat vastaamaan vuoden 2002 rahan arvoa.
b) Inflatoi pizzan keskihinnat vastaamaan vuoden 2008 rahan arvoa.
c) Piirrä samaan koordinaatistoon kuvaajat pizzan inflatoitujen, deflatoitujen ja nimellishintojen kehityksestä vuosina 2002–2008.

Käytä inflatoinnissa ja deflatoinnissa elinkustannusindeksiä.

RATKAISU

a) Merkitään vuoden 2004 deflatoitua hintaa kirjaimella x_1.

$$\frac{7{,}63}{x_1} = \frac{1580}{1563}$$
$$1580x_1 = 11\,925{,}69 \qquad |:1580$$
$$x_1 = 7{,}547\ldots$$
$$x_1 \approx 7{,}55$$

Merkitään vuoden 2006 deflatoitua hintaa kirjaimella x_2.

$$\frac{7{,}98}{x_2} = \frac{1622}{1563}$$
$$1622x_2 = 12\,472{,}74 \qquad |:1622$$
$$x_2 = 7{,}689\ldots$$
$$x_2 \approx 7{,}69$$

Merkitään vuoden 2008 deflatoitua hintaa kirjaimella x_3.

$$\frac{8{,}41}{x_3} = \frac{1730}{1563}$$
$$1730x_3 = 13\,144{,}83 \qquad |:1730$$
$$x_3 = 7{,}598\ldots$$
$$x_3 \approx 7{,}60$$

b) Merkitään vuoden 2002 inflatoitua hintaa kirjaimella y_1.

$$\frac{7{,}09}{y_1} = \frac{1563}{1730}$$

$$1563y_1 = 12\,265{,}7 \qquad |:1563$$

$$y_1 = 7{,}847\ldots$$

$$y_1 \approx 7{,}85$$

Merkitään vuoden 2004 inflatoitua hintaa kirjaimella y_2.

$$\frac{7{,}63}{y_2} = \frac{1580}{1730}$$

$$1580y_2 = 13\,199{,}9 \qquad |:1580$$

$$y_2 = 8{,}354\ldots$$

$$y_2 \approx 8{,}35$$

Merkitään vuoden 2006 inflatoitua hintaa kirjaimella y_3.

$$\frac{7{,}98}{y_3} = \frac{1622}{1730}$$

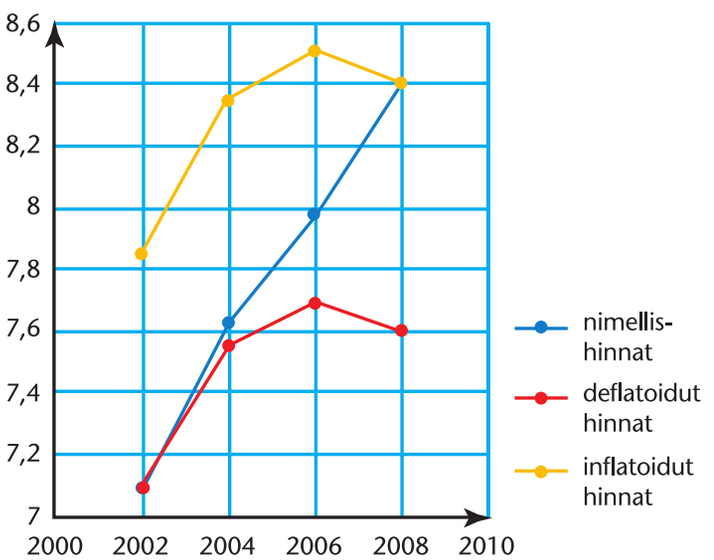
$$1622y_3 = 13\,805{,}4 \qquad |:1622$$

$$y_3 = 8{,}511\ldots$$

$$y_3 \approx 8{,}51$$

c) Kuvaajan piirtämiseksi, kootaan kaikki hinnat ensin samaan taulukkoon.

Vuosi	2002	2004	2006	2008
nimellishinnat (€)	7,09	7,63	7,98	8,41
deflatoidut hinnat (€)	7,09	7,55	7,69	7,60
inflatoidut hinnat (€)	7,85	8,35	8,51	8,41



Rahan ostovoima

Tarkastellaan tilannetta, jossa kahtena eri vuonna ostetaan samalla rahamäärällä samaa tuotetta, esimerkiksi omenoita 10 eurolla.

	Omenoiden kilohinta
2006	1,73 €
2008	1,96 €

2006

- Omenoiden kilohinta 1,73 €.
- Omenoita saadaan 10 eurolla

$$\frac{10\,€}{1{,}73\,€/\text{kg}} = 5{,}780\ldots \text{ kiloa}$$

2008

- Omenoiden kilohinta 1,96 €.
- Omenoita saadaan 10 eurolla

$$\frac{10\,€}{1{,}96\,€/\text{kg}} = 5{,}102\ldots \text{ kiloa}$$

Verrataan vuoden 2008 määrää vuoden 2006 määrään.

$$\frac{5{,}102\ldots\ \text{kg}}{5{,}780\ldots\ \text{kg}} = 0{,}8826\ldots \approx 88{,}3\ \%$$

Omenoita saadaan samalla rahamäärällä
100 % – 88,3 % = 11,7 % vähemmän vuonna 2008 kuin 2006.

Rahan ostovoima on laskenut 11,7 %.

Rahan ostovoimalla kuvataan sitä, kuinka paljon rahalla voidaan ostaa tuotteita ja palveluja. Silloin kun samalla rahamäärällä saadaan eri aikoina eri määrä tuotteita tai palveluja, rahan **ostovoima** on muuttunut.

- Kun samalla rahamäärällä saadaan vähemmän samaa tuotetta/palvelua, rahan ostovoima on laskenut.
- Kun samalla rahamäärällä saadaan enemmän samaa tuotetta/palvelua, rahan ostovoima on kasvanut.

ESIMERKKI 5 Elinkustannusindeksi (1951 = 100) vuonna 1980 oli 651. Vuonna 2000 vastaava indeksi oli 1501. Laske elinkustannusindeksin avulla a) inflaatioprosentti b) rahan ostovoiman muutos kyseisellä aikavälillä.

RATKAISU

a) Inflaatioprosentti saadaan vertaamalla vuoden 2000 indeksiä vuoden 1980 indeksiin.

$$\frac{1501}{651} = 2{,}3056\ldots \approx 230{,}6\ \%$$

Inflaatioprosentti on siis

$$230{,}6\ \% - 100\ \% = 130{,}6\ \%$$

Indeksien suhde $\frac{1501}{651} = 2{,}3056\ldots$

b) Merkitään tuotteen hintaa vuonna 1980 kirjaimella a, jolloin tuotteen hinta vuonna 2000 on $2{,}3056\ldots a$.

Ostetaan tätä tuotetta rahamäärällä b.

Vuonna 1980 tuotetta saadaan $\frac{b}{a}$ kappaletta.

Vuonna 2000 tuotetta saadaan $\frac{b}{2{,}3056\ldots a}$ kappaletta.

Verrataan vuoden 2000 määrää vuoden 1980 määrään.

$$\frac{\left(\frac{b}{2{,}3056\ldots a}\right)}{\left(\frac{b}{a}\right)} = \left(\frac{b}{2{,}3056\ldots a}\right) : \left(\frac{b}{a}\right)$$

$$= \left(\frac{\cancel{b}}{2{,}3056\ldots \cancel{a}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}}\right)$$

$$= \frac{1}{2{,}3056\ldots}$$

$$= 0{,}43371\ldots$$

$$\approx 43{,}4\ \%$$

Jakolasku muutetaan kertolaskuksi: jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla.

Ostovoima on **käänteen verrannollinen** indeksien suhteeseen.

Samalla rahalla saa vuonna 2000 noin 43,4 % siitä määrästä, mitä tuotetta sai vuonna 1980.

Rahan ostovoima on siis laskenut 100 % – 43,4 % = 56,6 %.

VASTAUS a) 130,6 % b) 56,6 %

Tehtäviä

Käytä tehtävissä oheisten taulukoiden indeksejä.

Elinkustannusindeksi kuvaa kuluttajahintojen muutosta samoin kuin kuluttajahintaindeksi. Elinkustannusindeksi on helppokäyttöisempi, sillä erilaiset indeksiuudistukset eivät katkaise indeksisarjaa. Elinkustannusindeksin perusvuotena on aina vuosi 1951.

Elinkustannusindeksi (1951 = 100)

Vuosi	Indeksi
1951	100
1955	100
1960	138
1965	178
1970	223
1975	392
1980	651
1985	980

Vuosi	Indeksi
1990	1248
1995	1390
2000	1501
2005	1594
2006	1622
2007	1662
2008	1730
2009	1730

Kuluttajahintaindeksi (2000 = 100)

Vuosi	Indeksi
2000	100
2001	102,6
2002	104,6
2003	105,1
2004	105,3

Vuosi	Indeksi
2005	106,2
2006	108,1
2007	110,8
2008	115,3
2009	115,3

E1 195. Lenkkimakkaran kilohinta vuonna 1980 (euroiksi muutettuna) oli 2,32 €/kg. Vastaava kilohinta vuonna 2004 oli 3,28 euroa. Jos inflaatiota kuvattaisiin lenkkimakkaran hinnan muutoksella, niin kuinka suuri olisi
a) vuosien 1980 ja 2004 välinen inflaatioprosentti
b) keskimäärin vuosittainen inflaatio?

196. Viisi eri-ikäistä henkilöä vertaili lapsena saamiaan viikkorahoja.
Martta muisti saaneensa 1955 viikkorahaa 0,50 mk.
Teron viikkorahan suuruus vuonna 1975 oli 2,00 mk.
Anna puolestaan sai vuonna 1985 viikkorahaa 8,00 mk.
Venlan viikkoraha vuonna 1995 oli 15,00 mk.
Jussin viikkoraha vuonna 2005 oli 2,50 €.

Jos inflaatiota mitataan elinkustannusindeksillä, niin kenen viikkoraha oli arvoltaan suurin? (1 € = 5,94573 mk)

E2 197. Vuonna 1990 bensiini maksoi huoltoasemalla 0,76 €/l.
a) Inflatoi bensiinin hinta elinkustannusindeksin avulla vastaamaan vuoden 2009 hintaa.
b) Kuinka suuri on ollut inflaatio mainitulla aikavälillä?

198. Vuonna 2000 erään huoneiston hinta oli 168 000 €. Jos huoneiston hinta olisi seurannut elinkustannusindeksiä, niin minkä hintainen huoneisto olisi ollut vuonna
a) 1960 b) 1980 c) 2009?

E3 199. Saara ja Konsta ottivat 120 000 € asuntolainaa vuonna 2004. Vuonna 2008 lainaa oli jäljellä 86 400 €. Kuinka paljon lainamäärä oli vähentynyt a) nimellisesti b) reaalisesti, kun inflaation mittarina käytetään kuluttajahintaindeksiä? Ilmoita vastauksesi prosentteina.

200. Vuonna 2005 asunnon arvo oli 95 000 €. Neljä vuotta myöhemmin sen arvo oli 128 000 €. Samaan aikaan vuotuinen inflaatioprosentti oli 2,0 %. Laske asunnon reaalisen arvon muutos prosentteina koko tarkasteluaikana.

201. Joannan kuukausipalkka vuonna 2006 oli 1850 €. Hänen kuukausipalkkansa nousi vuoteen 2009 mennessä yhteensä 250 €.
a) Kuinka monta prosenttia nimellispalkka nousi?
b) Kuinka suuri olisi ollut hintojen nousua vastaava korotettu palkka vuonna 2009, jos inflaation mittarina käytetään kuluttajahintaindeksiä?

E4 202. Seuraavaan taulukkoon on koottu yksityisen sektorin keskikuukausipalkkoja.

	1990	1995	2000	2005	2008
kuukausipalkka (€)	1459	1607	2081	2597	2933

Piirrä samaan koordinaatistoon deflatoitujen, inflatoitujen ja nimellispalkkojen kehitys vuosina 1990–2008, kun palkkakehitys on sidottu elinkustannusindeksiin.

E5 203. Laske elinkustannusindeksin avulla
a) inflaatioprosentti b) rahan ostovoiman muutos
aikavälillä 2000–2009.

204. Autojen hinnat nousivat kolmen vuoden aikana yhteensä 12 %. Kuinka paljon tällä perusteella rahan ostovoima on muuttunut?

Sekalaisia tehtäviä

205. Seuraavaan taulukkoon on koottu lapsilisät vuosina 1970–2009.

	1970	1980	1990	2000	2009
lapsilisä (€/kk)	3,20	27,08	67,28	90,00	100,00

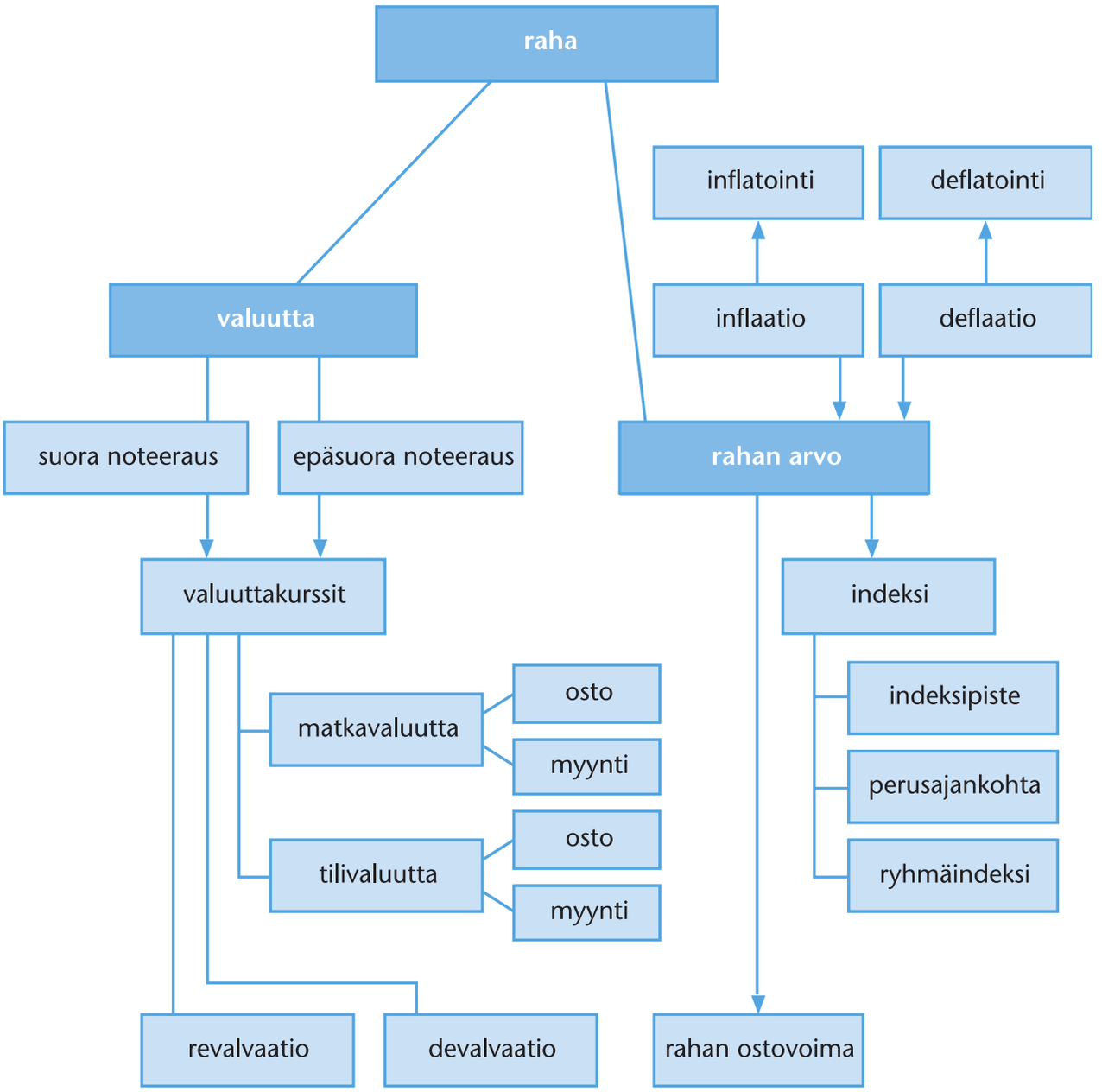
a) Inflatoi elinkustannusindeksin avulla lapsilisät vastaamaan vuoden 2009 rahaa. Piirrä kuvaaja inflatoiduista ja nimellisistä lapsilisistä.
b) Kuinka monta prosenttia lapsilisät olivat nousseet vuodesta 1970 vuoteen 2009 nimellisesti ja reaalisesti?

206. Jos palkat olisivat noudattaneet elinkustannusindeksiä, Inkan kuukausipalkat vuosina 1980 ja 2000 olisivat vastanneet toisiaan. Vuonna 1980 Inkan kuukausipalkka oli 1800 mk.
a) Laske Inkan kuukausipalkka vuonna 2000, kun 1 € = 5,94573 mk.
b) Laske kuukausipalkan nimellinen ja reaalinen muutos vuodesta 1980 vuoteen 2000 euroina.

207. Juuson palkka vuonna 2002 oli 3084 € ja kaksi vuotta myöhemmin 3372 €. Laske kuluttajahintaindeksin avulla, kuinka monta prosenttia Juuson palkka muuttui
a) nimellisesti b) reaalisesti.

208. Rahan ostovoima laskee kolmessa vuodessa 15 %.
a) Kuinka suuri on inflaatio kyseisellä aikavälillä?
b) Kuinka suuri on vuosittainen inflaatio kyseisellä aikavälillä?

Keskeisiä käsitteitä



6 Kertausosa

Kertaus prosenttilaskennasta

- Suhteelliset osuudet ilmoitetaan usein prosentteina.

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

- Kuinka monta prosenttia luku b on luvusta a?

$$\frac{b}{a} \cdot 100\,\%$$

- Kuinka paljon on p prosenttia luvusta a?

$$\frac{p}{100} \cdot a$$

1. Metso oyj:n osakkeen arvo Helsingin pörssissä oli 5.4.2009 12,63 euroa. Kesäkuun loppuun mennessä osakkeen arvo oli laskenut 4,3 %. Toisen vuosipuoliskon aikana osake kallistui 28,9 %.
   a) Mikä oli Metson osakkeen arvo vuoden 2009 lopussa?
   b) OMX Helsinki -yleisindeksi 5.4.2009 oli 5750 pistettä ja vuoden 2009 lopussa 6500 pistettä. Kuinka monta prosenttia enemmän nousi Metson osakkeen arvo kuin OMX Helsinki -yleisindeksi tarkasteluajanjaksona?

2. Puhelinoperaattori tarjosi liittymää 28,50 euron kuukausimaksulla, joka sisälsi 500 minuuttia puheaikaa. Sopimuksen minimiaika oli kaksi vuotta. Liittymä sisälsi puhelimen, jonka hinta liikkeessä oli 190 €. Jos asiakas olisi tarvinnut vain liittymän ilman puhelinta, hän olisi voinut ottaa mainitun operaattorin peruspaketin, jonka kuukausimaksu olisi ollut 0,60 € ja puhelujen minuuttihinta kaikkina vuorokaudenaikoina 5 snt. Lisäksi asiakas olisi saanut 50 eurolla puheaikaa. Lassi arvioi, että hän puhuu kuukauden aikana keskimäärin 500 minuuttia. Kuinka monta prosenttia kalliimmaksi tai halvemmaksi hänelle tulee seuraavien kahden vuoden aikana ottaa puhelimen sisältävä liittymä verrattuna siihen, että hän ottaisi erikseen kyseisen puhelimen ja liittymän peruspaketin?

3. Tuotteen pakkauskokoa suurennettiin 20 % ja samalla hintaa nostettiin 13 %. Kuinka paljon tuotteen kilohinta muuttui prosentteina?

4. Villen kuukausipalkasta puhtaana käteen jää 65 % palkasta. Asuntomenot nielaisevat tästä 30 %. Jäljelle jäävästä osasta puolet menee ruokaan, vaatteisiin ja pakollisiin laskuihin. Loppuosalla, 450 eurolla, on katettava satunnaiset menot. Kuinka suuri on Villen bruttopalkka?

5. Lentokoneen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella. [S2008, 4]

Ansiotulojen verotus

- Ansiotuloista maksetaan valtion tuloveroa, kunnallisveroa, kirkollisveroa ja muita veron kaltaisia maksuja.
- Verot peritään verokortin ennakonpidätysprosentin mukaan.
- **Valtion tulovero** määräytyy tuloveroasteikosta vuoden verotettavan tulon perusteella.
- **Lopullisessa verotuksessa** selviää, saako veronpalautusta vai joutuuko maksamaan jäännösveroa.
- **Kunnallisvero** ja **kirkollisvero** määräytyy asuinkunnan mukaan.

6. Kuinka paljon valtion tuloveroa on maksettava
   a) 25000 euron b) 50000 euron
   vuosiansioista?

7. Rovaniemellä asuvan Pertun vuosiansiot vuonna 2010 olivat sekä valtion että kunnan verotuksessa vähennysten jälkeen 48 000 €. Laske Pertun nettoansiot. Perttu on evankelisluterilaisen seurakunnan jäsen. Verojen lisäksi palkasta peritään eläkemaksua 4,50 % ja työttömyysvakuutusmaksua 0,40 %.

8. Mitkä olivat Pasin vuositulot valtion verotuksessa, kun hän maksoi 2420 € tuloveroa?

9. Mervi muutti Vaasasta Jyväskylään vuonna 2010. Jyväskylään muuttaessaan hän liittyi samalla evankelisluterilaisen seurakunnan jäseneksi. Vaasassa Mervi ei kuulunut seurakuntaan. Hänen bruttopalkkansa säilyi samana. Kuinka monta prosenttia Mervin nettoansiot muuttuivat ja mihin suuntaan, kun Mervi maksoi valtionveroa 13 % bruttopalkastaan?

Muut verot

- **Pääomatuloja** verotetaan pääomatuloveroprosentin mukaan (28 %).
- **Perinnöstä** ja **lahjasta** maksetaan veroa perintö- ja lahjaverotaulukon mukaisesti. Veron määrään vaikuttaa sukulaisuussuhde.
- **Arvonlisäveroa** maksetaan tavaroista ja palveluista. Yleinen arvonlisäveroprosentti on 23 %.

10. Eemeli sai 12 500 euron rahalahjoituksen. Kuinka paljon Eemelin tuli maksaa lahjaveroa, kun hän sai lahjan a) äidiltään b) puoliksi kahdelta sisareltaan?

11. Saimi sai tädiltään perinnöksi osakkeita. Hän joutui maksamaan perintöveroa 8870 €. Mikä oli osakkeiden verotusarvo?

12. Apteekki myy särkylääkepakkausta 4,20 eurolla. Lääkkeiden arvonlisävero on 9 %.
    a) Kuinka paljon lääkkeen vähittäishinnasta on arvonlisäveroa?
    b) Paljonko arvonlisäveron määrä on prosentteina myyntihinnasta?

13. Kauppias ostaa mansikanviljelijältä 1500 kg mansikoita. Mansikoiden (arvonlisäverollinen) kilohinta on 1,90 €. Kauppias myy mansikat kuluttajille 3,20 €/kg. Kuinka paljon kauppias tilittää arvonlisäveroa valtiolle koko 1500 kg:n erästä? Elintarvikkeiden arvonlisävero on 13 %.

14. Henkilö ostaa vuoden alussa 500 kpl osaketta A hintaan 4,50 €/kpl ja saman määrän osaketta B hintaan 8,85 €/kpl. Puolen vuoden kuluttua hän myy A-osakkeet hintaan 7,20 €/kpl ja B-osakkeet hintaan 6,90 €/kpl. Kuinka paljon veroa on maksettava, kun osakkeiden myyntivoitoista voi vähentää myyntitappiot ennen verotusta. Pääomatuloista on maksettava veroa 28 %.

Yksinkertainen korkolasku

- **Yksinkertaisessa korkolaskussa** talletusaika on korkeintaan yhden korkokauden mittainen.
- Jos **alkuperäinen pääoma on** k, niin
  – **korko** on $r = kit$
  – **kasvanut pääoma** on $K = k + r$
- **Nettokorko** saadaan, kun korkokannassa huomioidaan lähdevero (28 %).

15. Herra Miettinen sijoittaa korkeakorkoiselle tilille 90 000 € neljäksi kuukaudeksi. Maksettuaan 28 %:n lähdeveron Pennonen saa puhdasta korkotuottoa 620 €. Mikä on tilin korkokanta?

16. Leirikoulua varten kerätyt rahat, 12 000 €, talletetaan 11.8. pankkitilille, jonka korkokanta on 2,14 %. Rahat nostetaan tililtä vuoden lopussa. Laske nettokorko, kun lähdevero on 28 %.

17. Eveliina tallettaa tammikuun alussa tililleen 8000 €. Heinäkuun alussa tilin korkokanta nousee 0,3 prosenttiyksikköä. Koko vuoden korko on 132 €. Mikä on korkokanta ennen nousua? Lähdeveroa ei oteta huomioon.

18. Pekka tallettaa vuoden kahdeksan ensimmäisen kuukauden aikana joka kuukauden alussa tililleen saman summan. Tilin vuosikorkokanta on 2,8 %. Vuoden lopussa korkoa on kertynyt 38,08 €. Kuinka paljon Pekka laittaa kuukausittain tililleen? Lähdeveroa ei oteta huomioon.

Koronkorkolasku

- Kasvanut pääoma

  $K = kq^n$,

  jossa k on alkuperäinen pääoma, q korkotekijä ja n korkokausien lukumäärä.

- **Diskonttauksessa** rahan arvoa muutetaan ajassa taaksepäin.

- Alkuperäistä pääomaa kutsutaan **nykyarvoksi**.

- **Diskonttaustekijä**

  $\frac{1}{q^n}$,

  jossa q on korkotekijä ja n korkokausien lukumäärä.

19. Leila sijoittaa tuottotilille 2500 € kuudeksi vuodeksi. Koroista maksetaan 28 %:n lähdevero.
    a) Mikä on tilin nettokorko, kun tilin korkokanta on 3,20 % ja korko liitetään pääomaan vuosittain?
    b) Mikä on tilin korkokanta, kun nettokorko kuudelta vuodelta on 318,06 €?

20. Maija tallettaa kummilapsensa tilille kerran vuodessa määrätyn summan. Tilin korkokanta on 1,8 %. Kymmenen vuoden kuluttua tilillä on rahaa 13 245,52 €. Mikä on Maijan vuotuinen talletus, kun lähdeveroa ei oteta huomioon?

21. Lasse ja Laura avaavat asuntosäästöpalkkiotilin. He tallettavat tilille joka kuukausi 300 euroa viiden vuoden ajan. Tilin vuosikorkokanta on 2,9 %. Kuinka paljon heillä on tilillään viiden vuoden kuluttua? Koroista maksetaan 28 %:n lähdevero, joka maksetaan vuoden lopussa ennen kuin korko liitetään pääomaan.

22. Rudi ostaa auton. Hänellä on kaksi mahdollista tapaa auton maksamiseen. Rudi voi maksaa kerralla koko kauppasumman, 15 000 €. Toinen vaihtoehto on maksaa käteisellä käsiraha 5000 €, vuoden kuluttua 5100 € ja kahden vuoden kuluttua 5200 €. Kumpi vaihtoehdoista on Rudille edullisempi, kun vuotuisena diskonttauskorkokantana pidetään 3,1 %?

23. Sijoittaja on ostanut kahta arvopaperia. Toisesta arvopaperista saa kolmen vuoden kuluttua 15 000 €, joka sisältää 4,5 %:n vuosituoton. Toisesta saa viiden vuoden kuluttua 20 000 €, joka sisältää 6,5 %:n vuosituoton. Sijoittaja joutuu rahavaikeuksiin ja diskonttaa arvopaperinsa. Kuinka paljon hänelle arvopapereista maksetaan?

Sijoittaminen

- **Pankkitalletuksiin** sijoittaminen tarkoittaa usein korkeakorkoisille tileille sijoittamista. Korkotuotosta maksetaan lähdeveroa 28 %.
- **Eläkevakuutusmaksut** ovat tiettyyn rajaan asti vähennyskelpoisia verotuksessa. Vakuutuksen kautta maksettavasta eläkkeestä maksetaan pääomatulovero (28 %).
- **Sijoitusvakuutuksissa** tuotto lisätään suoraan sijoitettuun pääomaan. Tuotosta maksetaan verot vasta kun sijoitus päättyy.
- **Joukkovelkakirjalaina** merkitään emissiokurssin mukaan. Tämän lisäksi ostettaessa maksetaan liikkeellelaskupäivän ja merkintäpäivän välinen korko. Lainan korkotuotosta maksetaan pääomatuloveroa (28 %).
- **Osake** on nimellisarvon suuruinen laskennallinen osuus osakeyhtiöstä. Osakkeita voi ostaa pörssierissä. Osakkeiden myyntivoitosta ja osingoista maksetaan pääomatuloveroa (28 %).
- **Sijoitusrahastoissa** rahastoyhtiö sijoittaa varoja erilaisiin arvopapereihin. Myyntivoitosta ja voitto-osuudesta on maksettava pääomatuloveroa (28 %).

24. Mikä on nettotuotto sijoitusvakuutuksessa, johon sijoitetaan 2500 € vuodessa 10 vuoden ajan? Viimeinen, 10. talletus tehdään vuosi ennen rahojen nostamista. Vuosituotoksi on arvioitu 9,0 % ja pääomatulovero maksetaan vasta sijoituksen päättyessä.

25. Valtion liikkeellelaskeman obligaation vuosikorko oli 7,20 %. Sijoittaja osti obligaatioita 60 päivää liikkeellelaskun jälkeen. Mikä oli obligaation hinta liikkeellelaskupäivänä, kun sijoittaja joutui maksamaan obligaatioista 9917,60 €?

26. Herra Äyrinen osti 1000 kappaletta erään yrityksen osakkeita 12,40 euron kappalehintaan. Keväällä yritys jakoi jokaiselta osakkeelta osinkoa 0,75 €. Muutamia kuukausia myöhemmin Äyrinen myi osakkeet hintaan 15,05 €. Oston ja myynnin yhteydessä hänen piti maksaa välityspalkkio, joka oli 1,0 % kauppahinnasta. Kuinka paljon Äyrinen sai voittoa osakkeillaan, kun osingoista sekä myyntivoitosta on maksettava 28 % veroa? Osinkotuloista 30 % on verovapaata.

27. Korkeakorkoiselle tilille talletettiin rahasumma kolmeksi vuodeksi. Vuotuinen korkokanta oli 4,0 %. Talletusajan lopussa sijoitetulle summalle maksettiin 8,0 %:n lisäkorko. Koroista maksettiin 28 %:n vero. Kuinka suuri summa tilille talletettiin, kun talletusajan päättyessä rahaa nostettiin 16 624,43 €?

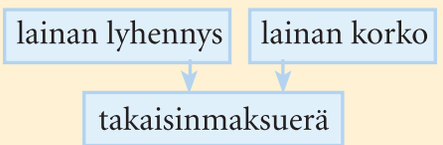
28. Mikko sijoitti vuoden neljän ensimmäisen kuukauden aikana Kestävä kehitys -rahastoon joka kuukausi saman summan. Osuuden arvo mainittuina kuukausina vaihteli seuraavasti:

tammikuu	helmikuu	maaliskuu	huhtikuu
1,20	1,02	0,85	1,25

Oliko Mikko rahastosijoituksissaan voitolla vai tappiolla huhtikuun sijoituksen jälkeen? Kuinka monta prosenttia voitto tai tappio on sijoitussummasta?

Erilaisia lainoja

- Pankkilainaa ottaessa pankit vaativat yleensä lainalle vakuuksia ja takauksia.
- **Lainan takaisinmaksuerä** koostuu lainan lyhennyksestä ja lainan koroista.



- **Tasalyhennyslainassa** lainan lyhennys pysyy samana koko ajan. Korko ja maksuerän suuruus vaihtelee.
- **Annuiteettilainassa** ja **kiinteässä tasaerälainassa** takaisinmaksuerän suuruus pysyy samana, jos korko pysyy muuttumattomana. Lyhennyksen ja koron määrä maksuerässä vaihtelee.
- Koron muuttuessa annuiteettilainassa maksuerän suuruus muuttuu, kiinteässä tasaerälainassa laina-aika muuttuu.
- **Annuiteetti** eli tasaerä

$$A = Kq^n \frac{1-q}{1-q^n},$$

jossa K on lainapääoma, q korkotekijä ja n maksukertojen lukumäärä.

- Jäljellä oleva lainamäärä annuiteettilainassa

$$V_k = Kq^k - A\frac{1-q^k}{1-q},$$

jossa K on lainapääoma, q korkotekijä, k lyhennysten määrä ja A annuiteetti.

29. Kati ottaa keittiöremonttia varten 12 000 €:n tasalyhenteisen pankkilainan. Lainan vuosikorko on 3,0 % ja laina-aika neljä vuotta. Lainaa lyhennetään kerran kuukaudessa.
    a) Laske ensimmäisen ja viimeisen takaisinmaksuerän suuruus.
    b) Kuinka paljon Kati maksaa korkoja yhteensä?

30. Laske 130 000 €:n asuntoluoton annuiteetti, kun lainan vuosikorko on 4,8 %, laina-aika on 15 vuotta ja lainaa lyhennetään
    a) kuukausittain b) neljännesvuosittain.

31. Sami aikoo ostaa asunnon. Hän on laskenut, että hänellä on varaa 600 €:n kuukausittaisiin lainanhoitokuluihin. Kuinka suuren annuiteettilainan Sami voi ottaa, kun lainan koroksi hän arvioi 3,6 % ja laina-ajaksi hän aikoo ottaa 20 vuotta? Anna vastaus tuhannen euron tarkkuudella.

32. Eräällä Etelä-Amerikan sademetsäalueella arvioidaan olevan 1,5 miljoonan kuutiometrin puuvaranto. Määrä lisääntyy 10 % vuodessa. Vuotuiset hakkuut vähentävät määrää 0,20 miljoonaa kuutiometriä vuodessa. Kuinka paljon puuta arvioidaan olevan jäljellä 10 vuoden kuluttua?

33. Annuiteettilainan vuosikorko on 3,36 %. Lainasumma on 80 000 € ja lainaa lyhennetään kerran kuukaudessa. Annuiteetin suuruus on 675,83 €. Kuinka pitkä on laina-aika?

Valuutat

- **Epäsuorassa noteerauksessa** kerrotaan yhden euron arvo ulkomaan valuutassa.
  1 € = 1,3626 USD
- **Suorassa noteerauksessa** kerrotaan, kuinka paljon yksi ulkomaanvaluutta on euroina.

$$1\ \text{USD} = \frac{1}{1{,}3626}\ € \approx 0{,}7339\ €$$

- Valuuttakursseissa valuutan vaihto eritellään sen mukaan käsitelläänkö valuuttaa suoraan tilien kautta vai konkreettisesti seteleinä.
- **Devalvaatiolla** tarkoitetaan valuutan ulkoisen arvon alenemista suhteessa muihin valuuttoihin.
- **Revalvaatiolla** tarkoitetaan valuutan ulkoisen arvon kasvamista suhteessa muihin valuuttoihin.

Käytä tehtävissä sivun 101 valuuttakursseja.

34. Trappen perhe on lähdössä lomamatkalle Lontooseen. He vaihtavat 2000 € punniksi. Palattuaan takaisin Suomeen Trappet vaihtavat jäljelle jääneen summan takaisin euroiksi. Kuinka monta euroa he saavat, kun matkalla kului neljä viidesosaa vaihdetuista punnista?

35. Suomalainen energiayhtiö tuo öljyä Venäjältä. Miten muuttuu öljyn barrelihinta euroina, jos ruplan kurssi
    a) heikkenee 5 % euroon nähden
    b) vahvistuu 5 % euroon nähden?

36. Eemeli vaihtaa Yhdysvaltojen dollareita Suomessa Ruotsin kruunuiksi. Hän saa tällöin 870 kruunua. Kuinka paljon Eemelillä on dollareita?

37. Sijoittaja keinottelee valuuttakaupoilla. Hän ostaa 150 000 eurolla dollareita kurssin ollessa 1,3025. Pian oston jälkeen dollari revalvoituu suhteessa euroon 4,0 %. Kuinka paljon euroja sijoittaja saa, kun hän vaihtaa dollarit euroiksi revalvoitumisen jälkeen?

Indeksilaskenta

- **Indeksi** eli **indeksisarja** kuvaa muuttujan arvon suhteellista muutosta perusajankohtaan verrattuna.
- **Ryhmäindeksi** lasketaan usein painotettuna keskiarvona.
  1. Ryhmän pisteluku kerrotaan ryhmän painoarvolla.
  2. Näin saadut tulot lasketaan yhteen.
  3. Summa jaetaan kaikkien painoarvojen summalla.

38. Kerrostalokaksion hinta muuttui vuosien 2006–2010 aikana seuraavasti:

2006	2007	2008	2009	2010
82 000 €	88 000 €	95 000 €	100 000 €	110 000 €

    a) Laadi asunnon hintaa kuvaava indeksisarja perusajankohtana vuosi 2006.
    b) Kolmion hinta vuonna 2006 oli 105 000 €. Laske edellä muodostetun indeksisarjan avulla kolmion hinta vuonna 2010.

39. Vuonna 2000 kuluttajahintaindeksin arvo oli 100 ja kaksi vuotta myöhemmin 104,2. Oletetaan, että kasvu on lineaarista.
    a) Esitä kuluttajahintaindeksin arvo vuosien funktiona, kun laskenta aloitetaan vuodesta 2006.
    b) Laske mallin avulla vuoden 2009 indeksin arvo. Kuinka monta prosenttia se eroaa todellisesta arvosta 115,3?
    c) Ennusta indeksin arvo vuonna 2016.

40. Woodin metalli on seos, joka sisältää vismuttia 50 %, lyijyä 25 %, tinaa 12,5 % ja kadmiumia 12,5 %. Mainittujen alkuaineiden tiheydet on esitetty taulukossa.

Vismutti	Lyijy	Tina	Kadmium
$9{,}75\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$	$11{,}35\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$	$7{,}28\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$	$8{,}65\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

    Laske annettujen tietojen avulla Woodin metallin tiheys.

41. Opettaja käytti matematiikan kurssin arvioinnissa hyväksi viittä osa-aluetta, jotka hän arvioi asteikolla 4–10. Helin tulokset ennen kurssikoetta olivat seuraavat:

Alue	Tulos	Painoarvo
lasketut tehtävät	9	20 %
pistarit	8,5	15 %
projektityö	8	20 %
jatkuva näyttö	7	5 %
kurssikoe	?	40 %

    Mikä arvosana Helin on saatava kurssikokeesta, jotta hän saisi kurssiarvosanaksi 9? Kokonaistulos pyöristetään normaalien sääntöjen mukaan kokonaisiksi numeroiksi.

Inflaatio ja rahan arvo

- **Inflaatiolla** tarkoitetaan liikkeellä olevan rahamäärän kasvua ja rahan arvon alenemista.
- **Deflaatiolla** tarkoitetaan liikkeellä olevan rahamäärän pienenemistä ja rahan arvon nousemista.
- **Nimellisessä muutoksessa** ei huomioida inflaation vaikutusta.
- **Reaalista muutosta** laskettaessa huomioidaan inflaation vaikutus.
- **Rahan ostovoimalla** kuvataan sitä, kuinka paljon rahalla voidaan ostaa tavaroita ja palveluita.

42. Vuonna 2000 elinkustannusindeksin arvo oli 1501 ja vuonna 2009 se oli 1730. Rouva Snäll pitää yksityisvastaanottoa lääkäriasemalla. Hänen vuosiansionsa vuonna 2000 olivat 78 000 € ja vuonna 2009 ansiot olivat 86 000 €. Miten Snällin reaaliansiot muuttuivat euroina?

43. Laske edellisen tehtävän elinkustannusindeksin avulla, miten rahan ostovoima muuttui mainitulla aikavälillä.

44. Elinkustannusindeksi vuosina 1975 ja 1995 oli 392 ja 1390. Aku Ankka -lehden irtonumero maksoi 1,26 € vuonna 1995.
    a) Laske elinkustannusindeksin avulla, mikä olisi ollut lehden hinta vuonna 1975.
    b) Lehden hinta vuonna 1975 oli 0,26 €. Inflatoi lehden hinta vastaamaan vuoden 1995 hintaa. Kuinka monta prosenttia se eroaa vuoden 1995 todellisesta hinnasta?

1. Harjoituskoe

1. Tuotteen hintaa nostettiin ensin 15 % ja myöhemmin vielä 25 %.
   a) Kuinka monta prosenttia hinta kaikkiaan nousi?
   b) Kuinka monta prosenttia viimeistä hintaa on laskettava, jotta se olisi sama kuin ennen ensimmäistä korotusta?

2. Talletustilille sijoitetaan 10 000 euroa 10 vuoden ajaksi. Korkoa maksetaan 1,5 % vuodessa. Laske loppupääoma, kun korko lisätään tilille a) vuosittain b) kuukausittain.

3. Jonna sijoittaa 5000 euroa tilille, jonka korkoprosentti on 1,5 % vuodessa.
   a) Kuinka paljon korkoa pankki maksaa talletukselle, jos pääoma on tilillä 4 kuukautta ja lähdevero on 28 %?
   b) Kuinka pitkä on talletusaika, jos pankin maksama nettokorko on 50 €?

4. Perttu ottaa 35 000 euron suuruisen lainan. Lainan vuotuinen korkokanta on 9,6 %, lainaaika 5 vuotta ja lainaa lyhennetään kuukausittain. Laske ensimmäisen ja viimeisen maksuerän suuruus, kun laina on a) annuiteettilaina b) tasalyhennyslaina.

5. Taulukossa on annettu Yhdysvaltojen dollarin kursseja.

	Setelivaluutta	
	Osto	Myynti
USD	1,3201	1,2790

   a) Amerikkalainen turisti haluaa vaihtaa 1100 dollaria euroiksi. Paljonko hän saa?
   b) Suomalainen turisti vaihtoi euroja dollareiksi. Vaihtaessaan hän sai 342 dollaria. Kuinka paljon euroja turisti vaihtoi?

6. Elintarvikkeista maksetaan 13 % arvonlisäveroa. Kirjoista ja lehdistä maksettavan arvonlisäveron suuruus on 9 %.
   a) Laske lehden myyntihinta, kun sen veroton hinta on 2,80 €.
   b) Lilli ostaa kaupasta elintarvikkeita 35 eurolla ja lehtiä 5,80 eurolla. Kuinka paljon arvonlisäveroa Lilli ostoksissaan maksaa?

7. Emmin nettopalkka kuukaudessa nousi 1500 eurosta 1560 euroon. Samaan aikaan kuluttajahintaindeksi muuttui arvosta 110,0 arvoon 114,2. Miten Emmin ansiotaso muuttui
   a) nimellisesti b) reaalisesti?

2. Harjoituskoe

1. Akun verotettava tulo vuonna 2010 oli 34 917 €. Kunnallisvero oli 20,00 % ja kirkollisvero 1,25 %. Lisäksi Akun palkasta peritään 4,50 % eläkemaksua ja 0,40 % työttömyysvakuutusmaksua. Kuinka paljon Aku maksaa tuloistaan veroja ja veronkaltaisia maksuja?

Valtion tuloveroasteikko 2010		
Verotettava ansiotulo (€)	**Vero alarajan kohdalla (€)**	**Vero alarajan ylittävästä tulon osasta (%)**
15200–22600	8	6,5
22600–36800	489	17,5
36800–66400	2974	21,5
66400–	9338	30,0

2. Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia? [K2008, 9]

3. Viivi ja Wagner olivat myymässä asuntoaan. He saivat kaksi ostotarjousta:

Tarjous A
- käteisenä heti 245 000 €

Tarjous B
- käteisenä heti 90 000 €
- vuoden kuluttua 63 400 €
- kahden vuoden kuluttua 100 200 €

Kumpi tarjouksista oli parempi Viivin ja Wagnerin kannalta, kun korkokanta on 5,2 %?

4. Aku ja Iines ottavat 180 000 euron asuntolainan 15 vuodeksi, korkokannan ollessa 4,8 %. Lainaa lyhennetään joka kolmas kuukausi. He miettivät, ottavatko tasalyhennyslainan vai annuiteettilainan. Laske kummankin lainan kohdalla
   a) ensimmäisen ja viimeisen maksuerän suuruus
   b) lainan määrä 45 lyhennyksen jälkeen.

5. Minni päättää aloittaa asuntosäästämisen. Hän tallettaa vuoden alussa 1200 € tilille, jonka vuosikorkokanta on 2,3 %. Saman suuruisia 1200 euron talletuksia Minni tekee joka toinen kuukausi. Kuinka paljon rahaa Minnin tilillä on viidennen talletusvuoden lopussa?

3. Harjoituskoe

1. Lassi on ostamassa 15 500 euron arvoista autoa. Autokauppias tarjoaa autolle seuraavaa rahoitusta: Ostohetkellä hinnasta maksetaan käteissuorituksena 3000 €. Loput auton hinnasta maksetaan neljässä vuodessa kuukausittain 5,52 %:n vuosikorolla. Jokaisen maksuerän kohdalla maksetaan lisäksi 5 € käsittelymaksuja.
   a) Laske yhden maksuerän suuruus, kun maksuerät ovat yhtä suuria alusta loppuun?
   b) Kuinka monta prosenttia alkuperäistä hintaa kalliimmaksi auton osto tulee tällä osamaksusopimuksella?

2. Kirja maksaa 32 €. Kuinka paljon kirjan hinnassa on arvonlisäveroa, kun kirjojen arvonlisäveroprosentti on 9 %?

3. Turisti vaihtaa pankissa ennen Norjan matkaa euroja Norjan kruunuiksi. Matkalta palattuaan hän vaihtaa jäljelle jääneet kruunut takaisin euroiksi. Molemmilla kerroilla pankki perii toimitusmaksua 5,50 €.
   a) Kuinka paljon turistin tulee pankille antaa euroja, jotta hän saisi 2300 Norjan kruunua?
   b) Kuinka paljon turisti saa euroja vaihtaessaan 260 kruunua takaisin euroiksi? Pankin myyntikurssi kruunulle oli 8,12320 ja ostokurssi 8,44820.

4. Inkan kuukausimenot jakaantuivat seuraavasti:

	Osuus kulutuksesta (%)
kirjat	8
harrastukset	10
kulttuuri	20
puhelinkulut	15
muut	47

   Laske menojen suhteellinen kokonaismuutos, kun Inkan kirjoihin käyttämä rahamäärä lisääntyy 2,5 prosentilla ja kulttuurin osuus pienenee 2,5 prosentilla.

5. Henkilö oli tehnyt seitsemän vuotta sitten 15 000 euron sijoituksen. Sijoituksen arvo on nyt 22 500 euroa. Minkä vuotuisen reaalisen korkokannan mukaan hän sai sijoitukselleen korkoa, kun vuotuinen inflaatio kyseisellä aikavälillä oli keskimäärin 2,0 %?

6. Henkilö otti vuoden 2005 alussa 80 000 euron asuntolainan 10 vuodeksi. Lainan lyhennys ja korko maksetaan vuosittain yhtä suurena makuseränä aina vuoden lopussa.
   a) Mikä on maksuerän suuruus, jos korko on 4,25 %?
   b) Lainasopimuksen mukaan koron noustessa erän suuruus ei muutu, vaan laina-aikaa pidennetään nousua vastaavasti. Tällöin viimeinen maksuerä poikkeaa muista. Laske viimeisen maksuerän suuruus, jos korko nousee 0,50 prosenttiyksikköä viiden vuoden jälkeen.

7 Ekstrat
Lukujonot ja summat

Kun lukuja kirjoitetaan peräkkäin tiettyyn järjestykseen, muodostuu **lukujono**. Lukujonossa olevia lukuja kutsutaan lukujonon **jäseniksi** tai **termeiksi**. Lukujonon 3, 9, 15, 21, … jäseniä ovat siis esimerkiksi 3 ja 9.

Jonon jäsen voidaan merkitä esimerkiksi kirjaimen a avulla seuraavasti:

- jonon 1. jäsen $a_1 = 3$
- jonon 2. jäsen $a_2 = 9$
- jonon 3. jäsen $a_3 = 15$.

Jäsenen järjestysnumero merkitään kirjaimen a oikeaan reunaan indeksiksi.

Jonolle halutaan yleensä ilmoittaa **yleinen jäsen** $\boldsymbol{a_n}$. Se kertoo säännön, jonka mukaan jonon jäsenet muodostuvat. Sääntö ilmoitetaan yleensä lausekkeena, jossa esiintyy jäsenen järjestysnumero n. Luku n voi saada vain positiivisia kokonaislukuarvoja eli

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Jonon 3, 9, 15, 21, … yleinen jäsen on esimerkiksi

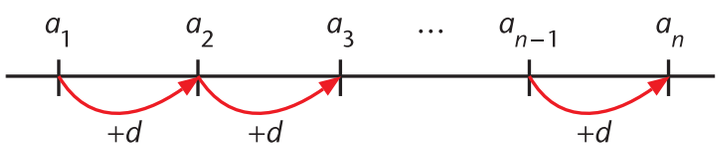
$$a_n = 6n - 3$$

Aritmeettinen lukujono ja summa

Aritmeettisessa lukujonossa minkä tahansa kahden peräkkäisen jäsenen erotus on aina vakio. Kahden peräkkäisen jäsenen erotusta kutsutaan **differenssiksi** $\boldsymbol{d}$.

$$d = a_n - a_{n-1}$$

a_n ja a_{n-1} ovat jonon kaksi peräkkäistä jäsentä.



Esimerkiksi lukujono 4, 6, 8, … on aritmeettinen ja sen differenssi on

$$d = 6 - 4 = 8 - 6 = 2$$

Aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

jossa a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, d on peräkkäisten jäsenten erotus ja n on järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Lukujonon 4, 6, 8, … yleinen jäsen on siis

$$\begin{aligned} a_n &= 4 + (n-1) \cdot 2 \\ &= 4 + 2n - 2 \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

ESIMERKKI 1 Määritä aritmeettisen jonon 52, 55, 58, …
a) yleinen jäsen b) 100. jäsen.

RATKAISU

a) Yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan:
- jonon ensimmäinen jäsen a_1
- jonon differenssi eli erotusvakio d.

Jonon ensimmäinen jäsen $a_1 = 52$.

Peräkkäisten jäsenten erotus $d = a_2 - a_1 = 55 - 52 = 3$.

Yleinen jäsen a_n saadaan kaavaan $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ avulla.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1) \cdot d \\ &= 52 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 52 + 3n - 3 \\ &= 3n + 49 \end{aligned}$$

$a_1 = 52$
$d = 3$

b) Mikä tahansa jonon jäsen voidaan laskea yleisen jäsenen avulla, jos tiedetään, millä paikalla luku on jonossa. Tällöin yleisen jäsenen lausekkeeseen kirjaimen n paikalle sijoitetaan jäsenen järjestysnumero.

Lukujonon 100. jäsen on

$$a_{100} = 3 \cdot 100 + 49 = 349$$

yleinen jäsen $a_n = 3n + 49$ ja $n = 100$

VASTAUS a) $a_n = 3n + 49$ b) 349

Aritmeettisen lukujonon jäsenet voidaan laskea yhteen aritmeettisen summan kaavalla.

Aritmeettinen summa $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2}$

- n = yhteenlaskettavien määrä
- a_1 = ensimmäinen jäsen
- a_n = viimeinen jäsen

ESIMERKKI 2 Laske summa $6 + 11 + 16 + \ldots + 281$.

RATKAISU Kyseessä on aritmeettinen summa, koska yhteenlaskettavat muodostavat aritmeettisen jonon. Lukujonon differenssi

$$d = 11 - 6 = 16 - 11 = 5$$

Summan laskemiseksi tarvitaan
- yhteenlaskettavien määrä n
- ensimmäinen jäsen $a_1 = 6$
- viimeinen jäsen $a_n = 281$.

Lasketaan ensin yhteenlaskettavien määrä aritmeettisen jonon yleisen jäsenen avulla.

Yleinen jäsen on

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1) \cdot 5 \\ &= 6 + 5n - 5 \\ &= 5n + 1 \end{aligned}$$

Koska viimeinen yhteenlaskettava on 281, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 5n + 1 &= 281 \\ 5n &= 280 \qquad | : 5 \\ n &= 56 \end{aligned}$$

Lasketaan nyt summa aritmeettisen summan kaavalla.

$$\begin{aligned} S_{56} &= 56 \cdot \frac{6 + 281}{2} \\ &= 8036 \end{aligned}$$

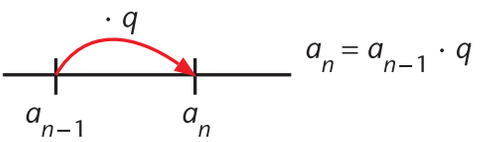
$n = 56$
$a_1 = 6$
$a_{56} = 281$

VASTAUS 8036

Geometrinen lukujono ja summa

Lukujonoa, jossa kahden peräkkäisen jäsenen suhde on vakio, kutsutaan **geometriseksi lukujonoksi**. Peräkkäisten jäsenten suhdetta kutsutaan **suhdeluvuksi** q.

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$



Lukujono 4, 20, 100, 500, … on geometrinen lukujono, jonka suhdeluku on

$$q = \frac{20}{4} = \frac{100}{20} = \frac{500}{100} = 5$$

Minkä tahansa geometrisen lukujonon yleinen jäsen voidaan määrittää ensimmäisen jäsenen ja suhdeluvun avulla. Geometrisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1},$$

jossa a_1 on jonon ensimmäinen jäsen, q peräkkäisten jäsenien suhde ja n järjestysluku ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

Esimerkki 3 Määritä geometrisen lukujonon 7, 14, 28, …
a) yleinen jäsen b) 9. jäsen.

Ratkaisu

a) Geometrisen lukujonon yleisen jäsenen määrittämiseksi tarvitaan jonon ensimmäinen jäsen a_1 ja suhdeluku q.
- Jonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 7$.
- Peräkkäisten termien suhde on $q = \frac{14}{7} = 2$.

$q = \frac{28}{14} = 2$

Yleinen jäsen

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \\ &= 7 \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

b) Mikä tahansa jonon jäsen voidaan laskea yleisen jäsenen avulla. Jonon 9. jäsen on $a_9 = 7 \cdot 2^{9-1} = 7 \cdot 2^8 = 1792$.

Vastaus a) $a_n = 7 \cdot 2^{n-1}$ b) $a_9 = 1792$

Geometrisen lukujonon summa voidaan laskea omalla summakaavallaan.

Geometrinen summa $S_n = a_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1$

- n = yhteenlaskettavien määrä
- a_1 = ensimmäinen jäsen
- q = suhdeluku

Huomaa, ettei saatu yleinen sääntö ole voimassa, jos $q = 1$. Tällöin nimittäjä olisi nolla.

Jos $q = 1$, on kyseessä aritmeettinen summa

$$a_1 + a_1 + \ldots + a_1 = na_1,$$

jossa n on yhteenlaskettavien lukumäärä.

ESIMERKKI 4 Laske geometrinen summa $3 + 12 + 48 + \ldots + 49\,152$.

RATKAISU Lukujonon ensimmäinen jäsen on $a_1 = 3$ ja suhdeluku

$$q = \frac{12}{3} = 4$$

Määritetään geometrisen lukujonon yleisen jäsenen avulla, kuinka monta yhteenlaskettavaa summassa on.

Viimeinen yhteenlaskettava eli lukujonon n. jäsen on $a_n = 49\,152$. Koska geometrisen lukujonon yleinen jäsen on muotoa $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}
3 \cdot 4^{n-1} &= 49\,152 && \big| : 3 \\
4^{n-1} &= 16\,384 \\
\lg 4^{n-1} &= \lg 16\,384 \\
(n-1)\lg 4 &= \lg 16\,384 && \big| : \lg 4 \\
n - 1 &= \frac{\lg 16\,384}{\lg 4} \\
n &= \frac{\lg 16\,384}{\lg 4} + 1 \\
n &= 8
\end{aligned}$$

Eksponenttiyhtälön ratkaisu

1. Otetaan yhtälön molemmilta puolilta logaritmi.
2. Käytetään eksponentin siirtosääntöä $\lg a^r = r \cdot \lg a$.

Summassa on siis 8 yhteenlaskettavaa.

Käytetään summan laskemiseksi geometrisen summan kaavaa

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= 3 \cdot \frac{1-4^8}{1-4} \\ &= 3 \cdot \frac{1-65\,536}{1-4} \\ &= 3 \cdot \frac{-65\,535}{-3} \\ &= 3 \cdot 21\,845 \\ &= 65\,535 \end{aligned}$$

$a_1 = 3$
$q = 4$
$n = 8$

VASTAUS 65 535

Tehtäviä

Aritmeettinen lukujono ja summa

E1

1. Määritä aritmeettisen lukujonon yleinen jäsen ja 50. jäsen, kun lukujonon
   a) ensimmäinen jäsen on -8 ja differenssi 3
   b) kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 25 ja 17.

2. Määritä aritmeettisen jonon 100. jäsen, kun
   a) jonon kolme ensimmäistä jäsentä ovat 85, 78 ja 71
   b) $a_{15} = -30$ ja $a_{60} = -165$.

E2

3. Laske aritmeettisen summan kaavaa käyttäen
   a) $10 + 20 + 30 + \ldots + 150$
   b) $\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \ldots + \frac{12}{12}$.

4. Laske aritmeettisen lukujonon 150 ensimmäisen jäsenen summa, kun
   a) $a_1 = 3$ ja $a_2 = 51$ b) $a_1 = -4$ ja $a_4 = -10$.

5. Laske aritmeettinen summa
   a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ b) $4 + 8 + 12 + \ldots + 1300$.

6. Lukujonon ensimmäinen jäsen on 38 ja differenssi 7. Kuinka monta lukujonon jäsentä on laskettu yhteen, jos niiden summa on 10 094?

7. Roope sijoittaa Kaukoidän rahastoon. Hän aloitti sijoittamisen tammikuussa 2002. Sijoitettava summa kasvaa joka kuukausi 250 eurolla. Joulukuussa 2003 Roope sijoitti 6400 €.
   a) Sijoitettavat summat muodostavat aritmeettisen lukujonon. Määritä sen yleinen jäsen.
   b) Milloin sijoitettava summa ylittää 10 000 €?

8. Linnan tornin katto on suoran ympyräkartion muotoinen. Katto on katettu pienillä paanuilla siten, että paanut on asetettu kerroksittain. Ylimmässä kerroksessa, tornin huipussa, on vain kolme paanua. Jokaisessa alemmassa kerroksessa on aina kahdeksan paanua enemmän kuin edellisessä kerroksessa. Paanut on ladottu 45 kerrokseen. Kuinka monta paanua kattoon on yhteensä käytetty?

Geometrinen lukujono ja summa

E3

9. Määritä geometrisen jonon yleinen jäsen ja 7. jäsen, kun lukujonon
   a) ensimmäinen jäsen on 15 ja suhdeluku 2
   b) kaksi ensimmäistä jäsentä ovat 4374 ja 1458.

10. Kuinka monta prosenttia suurempi on geometrisen lukujonon 2, 4, 8, 16, … yhdeksäs jäsen verrattuna aritmeettisen lukujonon 2, 4, 6, 8, … yhdeksänteen jäseneen?

11. Laske geometrisen jonon suhdeluku ja ensimmäinen jäsen, kun $a_{10} = 128$ ja $a_{14} = 2048$.

12. Kuinka mones geometrisen jonon $5, \frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \ldots$ jäsen on ensimmäisen kerran pienempi kuin 0,000 01?

13. Geometrisen lukujonon ensimmäinen jäsen on 3. Laske lukujonon kymmenen ensimmäisen jäsenen summa, kun lukujonon
   a) suhdeluku on 2 b) 8. jäsen on 6561.

E4

14. Laske geometrinen summa
   a) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 16\,384$
   b) $3 + 6 + 12 + \ldots + 1536$.

15. Laske geometrinen summa kahden desimaalin tarkkuudella.
   a) $1{,}05 \cdot 20 + 1{,}05^2 \cdot 20 + 1{,}05^3 \cdot 20 + \ldots + 1{,}05^{12} \cdot 20$
   b) $\frac{500}{1{,}02^8} + \frac{500}{1{,}02^7} + \frac{500}{1{,}02^6} + \ldots + 500$

16. Laske geometrinen summa kahden desimaalin tarkkuudella.
   a) $1{,}06^{23} + 1{,}06^{22} + 1{,}06^{21} + \ldots + 1{,}06$
   b) $1{,}03^{-30} + 1{,}03^{-29} + 1{,}03^{-28} + \ldots + 1$

17. Radioaktiivisen jätteen väliaikaisena paikkana toimii peruskallioon louhittu luola. Sinne varastoidaan joka vuoden alussa 2500 kg jätettä. Jätteestä hajoaa 10 % vaarattomiksi aineiksi vuoden aikana. Jos varastointi aloitettiin vuoden 2003 alussa, kuinka paljon vaarallista jätettä on vuoden 2050 lopussa?

Investointilaskenta

Investoinnilla tarkoitetaan tietyn rahasumman sijoittamista pitkäksi aikaa johonkin liiketoimintaan liittyvään kohteeseen. Investointi voi olla esimerkiksi

- laitehankinta
- toimitilojen laajennushanke
- henkilöstönkoulutus
- markkinointikampanja
- uuden tuotteen tutkimus- ja kehityshanke.

Koska investointiin liittyvät tulot ja menot ovat yleensä tulevaisuudessa, joudutaan aika ottamaan huomioon taloudellisissa tarkasteluissa. Eri aikaan sijoittuvien rahavirtojen vertaileminen onnistuu **diskonttauksen** avulla.

Investointilaskennalla pyritään arvioimaan mahdollisen investoinnin taloudellisia vaikutuksia yritykseen. Laskelmien avulla voidaan arvioida myös erilaisten investointivaihtoehtojen paremmuutta. Investointi on kannattava, kun siitä saatavat tuotot ylittävät menot.

ESIMERKKI 1

Yritys harkitsee investointia, joka maksaisi 100 000 €. Investoinnin myötä yritys saisi viiden vuoden kuluttua yhden maksusuorituksen, jonka arvo on 121 000 €. Vuotuinen diskonttokorkokanta on 4 %. Kannattaako yrityksen sijoittaa investointihankkeeseen?

RATKAISU

Lasketaan, kuinka arvokas viiden vuoden kuluttua saatava 121 000 € on tänä päivänä, kun korkokantana on 4 %. Tällöin diskonttaustekijä on $\frac{1}{1{,}04^5} = 1{,}04^{-5}$.

Nykyarvo on $1{,}04^{-5} \cdot 121\,000\,€ = 99\,453{,}1799...\,€$.

Yrityksen ei kannata tehdä investointia, koska 121 000 euron arvo tänä päivänä (99 453,18 €) on pienempi kuin vaadittu alkuinvestointi (100 000 €).

VASTAUS

Investointia ei kannata tehdä.

Nykyarvomenetelmässä (Net Present Value) tutkitaan tulevaisuuteen sijoittuvien tuottojen ja kustannusten arvoa nykyhetkessä. Investointi on kannattava, jos tuottojen nykyarvo on suurempi kuin kustannusten nykyarvo. Menetelmä soveltuu erityisesti investoinneille, joissa vuotuiset tuotot ja kustannukset eivät ole vuosittain samat.

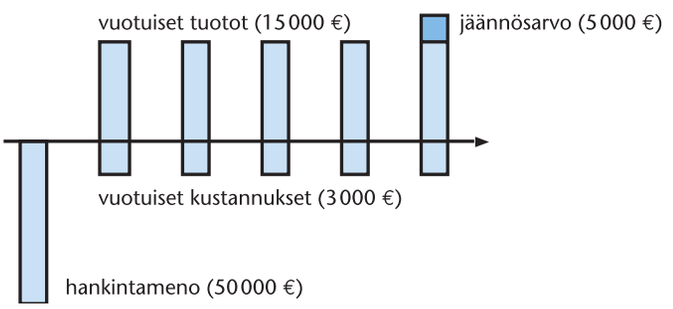
nettonykyarvo	=	tuottojen nykyarvo	–	kustannusten nykyarvo

ESIMERKKI 2

Yritys harkitsee uutta 50 000 €:n investointia. Investoinnin myötä tuotannon tehokkuus yrityksessä kasvaisi 5 %. Investoinnin arvioidaan tuovan lisätuottoja yritykseen 15 000 € vuodessa seuraavan viiden vuoden ajan. Vuotuisia kustannuksia investointi nostaa samalla ajanjaksolla 3000 € vuodessa. Jos jäännösarvo viiden vuoden kuluttua on investoinnille 5000 € ja laskentakorkokanta on 8 %, onko investointi kannattava yritykselle?

RATKAISU

Investoinnin aiheuttamat kassavirrat on esitetty viereisessä kuviossa.



Vuosittaisten kustannusten ja tuottojen voidaan ajatella sijoittuvan samaan hetkeen. Näin ollen vuosittaiset nettotuotot ovat

$$15\,000\ € - 3000\ € = 12\,000\ €$$

Diskontataan kaikki tuotot ja jäännösarvo nykyhetkeen.

$$\frac{12\,000}{1{,}08^1} + \frac{12\,000}{1{,}08^2} + \frac{12\,000}{1{,}08^3} + \frac{12\,000}{1{,}08^4} + \frac{12\,000}{1{,}08^5} + \frac{5000}{\underbrace{1{,}08^5}_{\text{jäännösarvo}}} = 51\,315{,}436\ldots\ (€)$$

Nettonykyarvo saadaan, kun tuottojen nettonykyarvosta vähennetään kulujen nettonykyarvo eli investoinnin suuruus.

NPV = nettonykyarvo

$$\text{NPV} = 51\,315{,}44\ € - 50\,000\ € = 1315{,}44\ €$$

VASTAUS

Positiivinen nettonykyarvo merkitsee, että laskelmien mukaan investointi on kannattava.

Tehtäviä

18. Laske nykyarvo 200 eurolle, joka saadaan kahden vuoden kuluttua, kun laskentakorkokanta on 8 %.

19. Yritys on ostamassa uutta konetta. Koneen myyjä tarjoaa kahta erilaista maksuvaihtoehtoa:
A) koko kauppahinta 20 000 € välittömästi
B) 5000 € välittömästi, 7000 € vuoden kuluttua ja 10 000 € kolmen vuoden kuluttua.
Jos laskentakorkokanta on 10 %, kumpi vaihtoehto yrityksen kannattaa valita?

E1 20. Laskin Oy suunnittelee uutta koneinvestointia. Talouspäällikkö Saara on arvioinut kassavirtojen noudattelevan seuraavaa taulukkoa. Onko investointi kannattava, jos korkokanta on 10 %?

	0. vuosi	1. vuosi	2. vuosi	3. vuosi	4. vuosi
kassasta maksut	100 000 €				
kassaan maksut		20 000 €	25 000 €	25 000 €	45 000 €

21. Täydennä taulukkoon puuttuvat luvut.

Nykyarvo (€)	Nimellisarvo (€)	Aika vuosina	Korkokanta
	3000	3	8 %
5250	7011	4	
675		5	12 %
712	800		5 %

22. Pulla Jussi Oy suunnittelee uuden sämpylälinjan hankintaa. Tarjolla on kaksi vaihtoehtoa, joiden kassavirrat ovat seuraavat:

Linja A (€)	0. vuosi (€)	1. vuosi (€)	2. vuosi (€)	3. vuosi (€)
meno (–)/ tulo (+)	–15 000	7000	7000	10 000

Linja B (€)	0. vuosi (€)	1. vuosi (€)	2. vuosi (€)	3. vuosi (€)
meno (–)/ tulo (+)	–28 000	10 000	12 000	15 000

Jos laskentakorkokanta on 9 %, kumpi linja Pulla Jussi Oy:n kannattaa valita?

23. Yritys harkitsee kopiokoneidensa uusintainvestointia. Yrityksellä on kaksi vaihtoehtoa. Ensimmäinen vaihtoehto on ostaa kopiokoneet, joiden hankintahinta on 28 000 €. Kopiokoneen käyttökustannukset ovat tällöin 2,2 snt/kopio sekä vuotuinen huoltokustannus 1100 €. Kopiokoneiden käyttöikä on 8 vuotta, ja niistä arvioidaan saatavan tämän jälkeen myytäessä 4000 €. Toinen vaihtoehto on ostaa kopiointipalvelut niitä tarjoavalta yritykseltä, jolloin kustannus on 7 snt/kopio. Kumpi vaihtoehto on yritykselle edullisempi, kun laskentakorkokanta on 6,5 % ja vuotuinen kopiomäärä 90 000 kopiota?

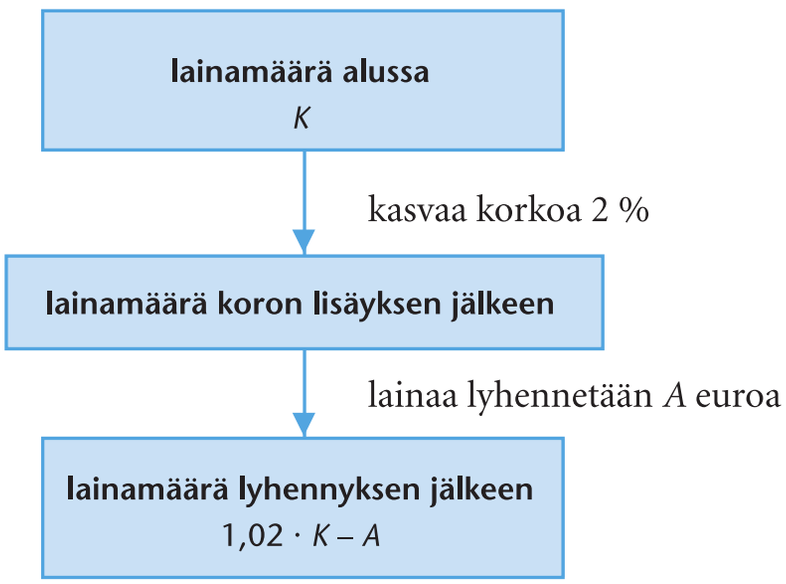
E2 24. Huoltoasema asentaa uuden autonpesulaitteen, jonka hinta asennettuna on 102 000 €. Laitetta käytetään seuraavat 5 vuotta ja sen jäännösarvo on 23 000 €. Laitteen vuotuiset käyttökustannukset (huolto + tarvikkeet) ovat 5000 €. Pesukertoja arvioidaan kertyvän vuodessa noin 3000. Mikä pitää yhden pesukerran hinnan keskimäärin olla, jotta investointi olisi kannattava 8 %:n laskentakorkokannalla?

Annuiteetin kaava

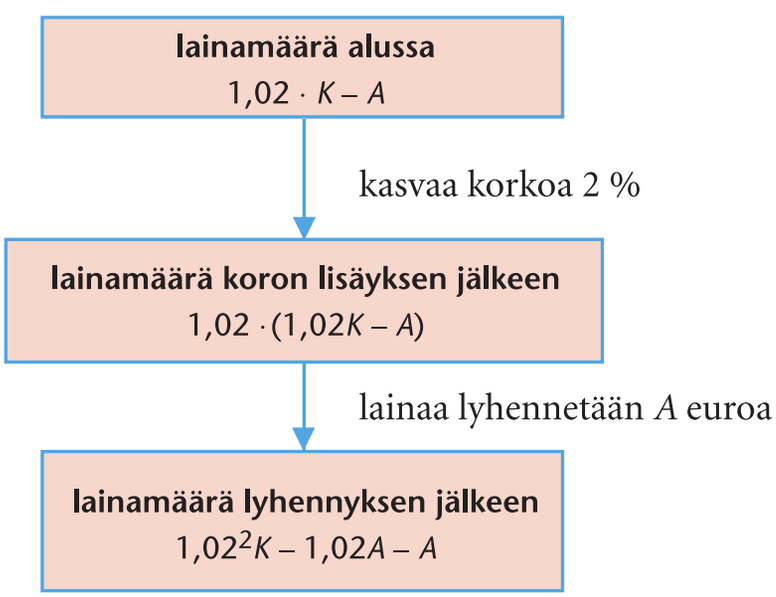
Johdetaan annuiteetin kaava lainalle, jonka suuruus on K euroa ja korkokanta 2,0 %. Laina on otettu neljäksi vuodeksi ja lainaa lyhynnetään aina vuoden lopussa.

Tarkastellaan tilannetta vuosi kerrallaan.

1. vuosi



2. vuosi



3. vuosi

lainamäärä alussa
$1{,}02^2K - 1{,}02A - A$

kasvaa korkoa 2 %

lainamäärä koron lisäyksen jälkeen
$1{,}02 \cdot (1{,}02^2K - 1{,}02A - A) = 1{,}02^3K - 1{,}02^2A - 1{,}02A$

lainaa lyhennetään A euroa

lainamäärä lyhennyksen jälkeen
$1{,}02^3K - 1{,}02^2A - 1{,}02A - A$

4. vuosi

lainamäärä alussa
$1{,}02^3K - 1{,}02^2A - 1{,}02A - A$

kasvaa korkoa 2 %

lainamäärä koron lisäyksen jälkeen
$1{,}02 \cdot (1{,}02^3K - 1{,}02^2A - 1{,}02A - A) = 1{,}02^4K - 1{,}02^3A - 1{,}02^2A - 1{,}02A$

lainaa lyhennetään A euroa

lainamäärä lyhennyksen jälkeen
$1{,}02^4K - 1{,}02^3A - 1{,}02^2A - 1{,}02A - A$

Lopussa lainan määrä on 0 €. Saadaan yhtälö

$$1{,}02^4K - 1{,}02^3A - 1{,}02^2A - 1{,}02 - A = 0$$

$$1{,}02^4K - A(1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1) = 0$$

Otetaan A yhteiseksi tekijäksi.

$$A(1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1) = 1{,}02^4K \quad \left|:(1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1)\right.$$

geometrinen summa
$1 + 1{,}02 + 1{,}02^2 + 1{,}02^3$

- $a_1 = 1$
- suhdeluku $q = 1{,}02$

$$A = \frac{1{,}02^4K}{1{,}02^3 + 1{,}02^2 + 1{,}02 + 1}$$

$$A = \frac{1{,}02^4K}{1 \cdot \frac{1 - 1{,}02^4}{1 - 1{,}02}}$$

$$A = 1{,}02^4K \cdot \frac{1 - 1{,}02}{1 - 1{,}02^4}$$

Katetuottolaskenta

Katetuotto ja kriittinen piste

Yrityksen kannattavuuden arvioinnissa yrityksen johto voi käyttää monenlaisia laskelmia. **Katetuottolaskennan** avulla pystytään arvioimaan toiminnan volyymin sekä tuottojen, kustannusten ja tuloksen välisiä riippuvuuksia. **Volyymilla** tarkoitetaan esimerkiksi kappalemääräistä tuotantoa tai myytyjen tuotteiden määrää. Katetuottolaskennan lähtökohtana on, että kustannukset reagoivat eri tavalla toiminnan volyymissa tapahtuviin muutoksiin.

Kustannuksia, joiden määrä riippuu toiminnan volyymista, kutsutaan **muuttuviksi kustannuksiksi**. Kustannuksia, joiden suuruuteen toiminnan volyymin vaihtelulla ei ole vaikutusta, kutsutaan puolestaan **kiinteiksi kustannuksiksi**.

Katetuottolaskelmissa käytetään aina ostojen ja myyntien osalta arvonlisäverottomia arvoja. Kannattavuutta mitataan joko absoluuttisilla eli rahamääräisillä tai suhteellisilla tunnusluvuilla.

Seuraavaan listaan on koottu muutamia katetuottolaskelman kannalta olennaisia käsitteitä.

- **Myyntituotto** saadaan, kun yksikköhinta kerrotaan kappalemäärällä.
- **Muuttuvat kustannukset** riippuvat oleellisesti ostojen ja tuotannon määrästä. Tyypillisiä muuttuvia kustannuksia ovat raakaainekulut, ylityöpalkat, tuotantokoneiden energiakulut ja toimituskulut.
- **Kiinteät kustannukset** ovat tuotannon määrästä periaatteessa riippumattomia. Tyypillisiä kiinteitä kustannuksia ovat kiinteät kuukausipalkat, tila- ja laitevuokrat, pääomakulut (korot ja poistot), vakuutukset, markkinointikulut, konttoritarvikkeet ja puhelinkulut.
- **Katetuotto** eli **myyntikate** tarkoittaa tulosta, joka jää jäljelle, kun myyntituotosta vähennetään muuttuvat kustannukset. Katetuotolla yrityksen tulee siis kattaa toiminnan aiheuttamat kiinteät kustannukset sekä voittotavoite.

katetuotto	=	myyntituotto	–	muuttuvat kustannukset

Katetuoton avulla lasketaan usein katetuottoprosentti (KTP), joka kertoo katetuoton suhteellisen osuuden myyntituotosta. Katetuottoprosentti kuvaa myös kiinteiden kustannusten osuutta tuotteen myyntihinnasta.

Yrityksen tulos kertoo, onko yrityksen toiminta kannattavaa. Tulos saadaan, kun katetuotosta vähennetään kiinteät kustannukset. Jos tulos on negatiivinen, toiminta on tappiollista. Jos tulos on positiivinen, toiminta on kannattavaa.

tulos	=	katetuotto	–	kiinteät kustannukset

ESIMERKKI 1

Kahvilassa kahvikupin hinta on 2 € (sis. alv). Kahvila myy kuukauden aikana 2500 kuppia kahvia. Muuttuvat kustannukset ovat 0,40 €/kuppi ja kiinteät kustannukset kuukaudessa 1800 euroa. Tee katetuottolaskelma. Kuinka suuren tuloksen kahvila tekee?

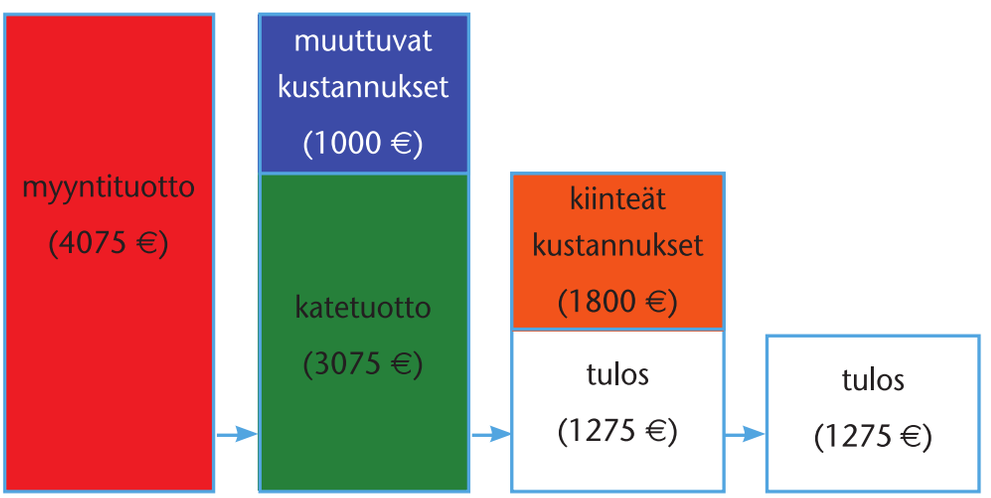
RATKAISU

Lasketaan ensin kahvikupin veroton hinta. Merkitään verotonta hintaa kirjaimella x.

$$\begin{aligned} 1{,}23x &= 2 \quad \big| : 1{,}23 \\ x &= 1{,}6260\ldots \\ x &\approx 1{,}63 \end{aligned}$$

- Myyntituotto $1{,}63\ € \cdot 2500 = \mathbf{4075\ €}$
- Muuttuvat kustannukset $0{,}40\ € \cdot 2500\ € = \mathbf{1000\ €}$
- Katetuotto $\mathbf{4075\ €} - \mathbf{1000\ €} = \mathbf{3075\ €}$
- Kiinteät kustannukset $\mathbf{1800\ €}$
- Tulos $\mathbf{3075\ €} - \mathbf{1800\ €} = 1275\ €$

Havainnollistetaan tilannetta vielä kuviolla.



VASTAUS

Kahvilan tulos on 1275 €.

Kriittisellä pisteellä (KRP) tarkoitetaan myyntimäärää, jonka mukaisella myyntituotolla saadaan kaikki kustannukset katettua mutta voittoa ei vielä synny. Kriittinen piste ilmoitetaan joko myyntituottona (€) tai kappalemääränä, jolla toiminnan tulos on nolla.

Kriittisessä pisteessä kokonaistuotot (myyntituotto) ovat yhtä suuret kuin kokonaiskustannukset (muuttuvat ja kiinteät kustannukset yhteensä).

Kriittinen piste kappaleina

$$\frac{\text{kiinteät kustannukset (€)}}{\text{katetuotto per yksikkö (€/kpl)}}$$

ESIMERKKI 2

Saunan kiukaita valmistava Hehku Oy valmistaa yhtä mallia kiukaita. Myyntihinta kiukaalle on 140 € + alv, muuttuvat kustannukset 90 €/kiuas ja kiinteät kustannukset 80 000 € kuukaudessa.

a) Kuinka monta kiuasta on kuukauden aikana myytävä, jotta kaikki kustannukset tulevat katetuksi?
b) Kuinka paljon kuukauden myyntitulo on kriittisessä pisteessä?

RATKAISU

a) Katetuotto yhtä kiuasta kohden on $140 - 90$ € $= 50$ €.

Jotta toiminta olisi kannattavaa, on näillä kappalekohtaisilla katetuotoilla katettava kaikki kiinteät kustannukset. Kriittisessä pisteessä myyntimäärän on oltava

$$\frac{80\,000\ €}{50\ €/\text{kpl}} = 1600\ \text{kpl}$$

kriittinen piste kappaleina

b) Lasketaan a-kohdan perusteella, kuinka paljon myyntituottoa saadaan 1600 kiukaan myymisestä.

$$140\ €/\text{kpl} \cdot 1600\ \text{kpl} = 224\,000\ €$$

kriittinen piste myyntituottona

VASTAUS

a) 1600 kiuasta b) myyntituotto 224 000 €

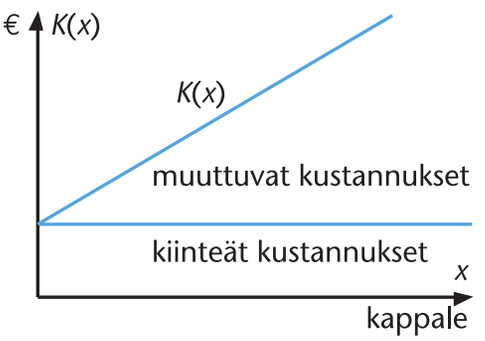
Kustannus-, tuotto- ja tulosfunktiot

Toiminnan volyymin ollessa nolla muuttuvia kustannuksia ei synny lainkaan. Kun tuotannon tai myynnin määrä kasvaa, kustannukset kasvavat samassa suhteessa. Tuotannon määrän ja kustannusten määrän välinen riippuvuus on siis lineaarista.

Katetuottolaskennassa kokonaiskustannukset saadaan, kun lasketaan yhteen muuttuvat ja kiinteät kustannukset. Merkitään kokonaiskustannuksia kirjaimella K ja määrää (volyymia) kirjaimella x. Tällöin kustannusfunktion voi esittää seuraavasti:

kokonaiskustannukset $K(x)$	=	muuttuvat kustannukset	+	kiinteät kustannukset

Kokonaiskustannusfunktio on lineaarinen funktio, jonka kuvaajana koordinaatistossa on suora.



Yrityksen kannalta myös yksikkökustannukset ovat usein tärkeitä. Yksikkökustannukset k saadaan, kun kokonaiskustannukset jaetaan kappalemäärällä.

Yksikkökustannukset k $\quad \dfrac{\text{kokonaiskustannukset}}{\text{kappalemäärä}}$

ESIMERKKI 3

Yritys valmistaa ja myy saunan kiukaita. Veroton myyntihinta on 140 €/kappale, muuttuvat kustannukset 85 €/kappale ja kiinteät kustannukset 100 000 € kuukaudessa.

a) Muodosta kokonaiskustannusfunktio ja piirrä kuvaaja.
b) Muodosta yksikkökustannusfunktio ja piirrä kuvaaja.
c) Laske yrityksen tulos ja yksikkökustannukset, kun kiukaita myydään 3000 kappaletta kuukaudessa.

RATKAISU

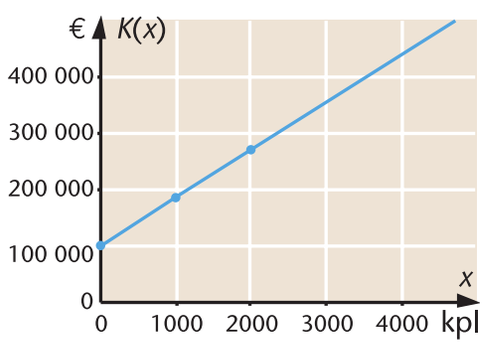
a) Merkitään valmistusmäärää kirjaimella x. Kokonaiskustannukset saadaan muuttuvien kustannusten ja kiinteiden kustannusten summana.

Kokonaiskustannusfunktio on muotoa

$$K(x) = 85x + 100\,000$$

Funktion kuvaajan piirtämiseksi annetaan valmistusmäärälle x muutamia arvoja ja lasketaan niitä vastaavat funktion arvot.

x (kpl)	$K(x)$ (€)
0	100 000
1000	185 000
2000	270 000



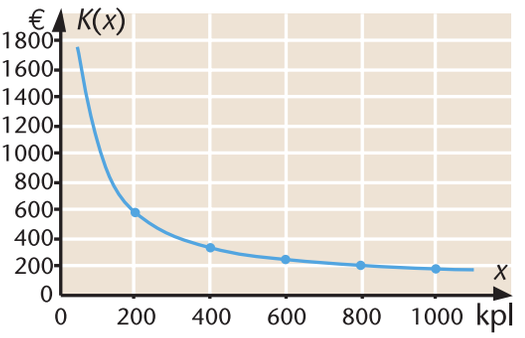
b) Yksikkökustannusfunktio saadaan, kun kokonaiskustannusfunktio $K(x)$ jaetaan valmistusmäärällä x.

Yksikkökustannusfunktio on muotoa

$$k(x) = \frac{85x + 100\,000}{x} = 85 + \frac{100\,000}{x}$$

Annetaan valmistusmäärälle x muutamia arvoja ja lasketaan vastaavat yksikkökustannukset.

x (kpl)	$K(x)$ (€)
200	585
400	335
600	251,66…
800	210
1000	185



Yksikkökustannukset vähenevät valmistusmäärän kasvaessa.

c) Lasketaan ensin 3000 kappaleen myyntituotto.

$$3000 \cdot 140\ € = 420\,000\ €$$

Kokonaiskustannukset ovat

$$\begin{aligned} K(3000) &= 85 \cdot 3000 + 100\,000 \\ &= 355\,000\ (€) \end{aligned}$$

Tulos saadaan, kun myyntituotoista vähennetään kokonaiskustannukset.

Tulos on $420\,000\ € - 355\,000\ € = 65\,000\ €$.

Sijoitetaan valmistusmäärä 3000 suoraan yksikkökustannusfunktioon:

$$k(3000) = 85 + \frac{100\,000}{3000} = 118{,}333\ldots\ (€)$$

VASTAUS a) $K(x) = 85x + 100\,000$ b) $k(x) = 85 + \dfrac{100\,000}{x}$

c) Tulos on 65 000 € ja yksikkökustannukset 118,33 €.

Samalla tavalla kuin kustannuksia kuvattiin kustannusfunktion $K(x)$ avulla, voidaan tuottoja kuvata funktion avulla. Myyntituottoa M kuvaava funktio saadaan, kun tuotteen yksikköhinta kerrotaan myyntimäärällä x.

myyntituotto $M(x)$	=	yksikkö-hinta	·	myyntimäärä x

Myyntimäärän x avulla yrityksen tulos T voidaan esittää kahden funktion erotuksena.

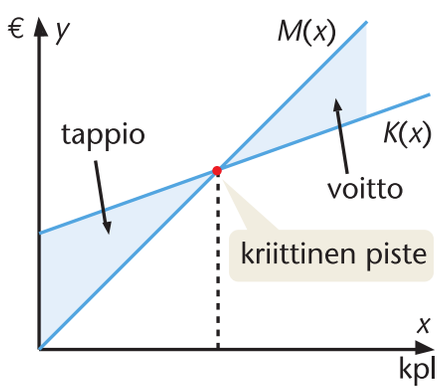
tulos $T(x)$	=	myyntituotto $M(x)$	–	kokonaiskustannukset $K(x)$

Kriittisessä pisteessä tulos on nolla, jolloin

$$\begin{aligned} T(x) &= 0 \\ M(x) - K(x) &= 0 \\ M(x) &= K(x) \end{aligned}$$

Kriittisessä pisteessä tuotot ja kokonaiskustannukset ovat siis yhtä suuret eli tuotoilla katetaan kaikki kustannukset.

Piirrettäessä tuotto- ja kustannusfunktiot samaan koordinaatistoon, voidaan kriittinen piste määritellä myös kuvaajan avulla.



Kun kokonaiskustannukset ovat myyntituottoa suuremmat, yritys tekee tappiota. Kun kokonaiskustannukset taas ovat myyntituottoa pienemmät, yritys tekee voittoa.

Esimerkki 4

Pannu Oy:n tuotteiden keskimääräinen myyntihinta on 100 €/kpl (+ alv), katetuotto 30 % ja vuotuiset kiinteät kustannukset 120 000 €.

a) Määritä graafisesti kappalemääräinen kriittinen piste. Milloin yrityksen toiminta on kannattavaa?
b) Määritä Pannu Oy:n tulosfunktio.
c) Kuinka suuren tuloksen Pannu Oy tekee, jos tuotteita valmistetaan 5500 kappaletta?

Ratkaisu

a) Merkitään tuotteiden valmistusmäärää kirjaimella x.

Muodostetaan myyntituottoja kuvaava funktio $M(x)$ ja kokonaiskustannuksia kuvaava funktio $K(x)$.

Koska tuotteiden keskimääräinen myyntihinta on 100 €, kuvaa myyntituottoa funktio

$$M(x) = 100x$$

myyntituotto = hinta · määrä

Koska katetuottoprosentti on 30 %, täytyy muuttuvien kustannusten olla 70 % myyntihinnasta eli 70 €/kpl. Kiinteät kustannukset ovat 120 000 €, joten kokonaiskustannuksia kuvaa funktio

$$K(x) = 70x + 120\,000$$

kokonaiskustannukset = muuttuvat kustannukset + kiinteät kustannukset

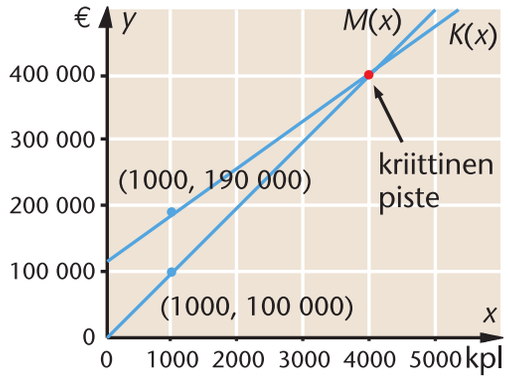
Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Lasketaan ensin funktioiden arvoja muutamilla muuttujan x arvoilla.

$M(0) = 0$
$M(1000) = 100 \cdot 1000 = 100\,000$

Myyntituottoa kuvaava funktio kulkee pisteiden (0, 0) ja (1000, 100 000) kautta.

$K(0) = 120\,000$
$K(1000) = 70 \cdot 1000 + 120\,000 = 190\,000$

Kokonaiskustannuksia kuvaava funktio kulkee pisteiden (0, 120 000) ja (1000, 190 000) kautta.



Kuvaajasta voidaan lukea, että kriittisessä pisteessä tuotteiden valmistusmäärä on 4000 kappaletta. Yrityksen toiminta tulee kannattavaksi, jos se pystyy myymään tuotteitaan vuodessa yli 4000 kappaletta.

b) Tulosfunktio $T(x)$ saadaan, kun myyntituotosta $M(x)$ vähennetään kokonaiskustannukset $K(x)$.

$$\begin{aligned} T(x) &= M(x) - K(x) \\ &= 100x - (70x + 120\,000) \\ &= 100x - 70x - 120\,000 \\ &= 30x - 120\,000 \end{aligned}$$

c) Lasketaan Pannu Oy:n tulos edellisessä kohdassa määritetyn tulosfunktion avulla.

$$T(5500) = 30 \cdot 5500 - 120\,000 = 45\,000$$

VASTAUS

a) Kriittisessä pisteessä tuotteiden valmistusmäärä on 4000 kappaletta. Yli 4000 kappaleen valmistusmäärällä Pannu Oy:n toiminta on kannattavaa.
b) $T(x) = 30x - 120\,000$
c) Pannu Oy:n tulos on 45 000 €.

Tehtäviä

Hinnat ja kustannukset ovat ilman arvonlisäveroa, ellei tehtävässä toisin mainita.

Katetuotto ja kriittinen piste

25. Mainostoimiston myyntituotot ovat 250 000 €/kk (+ alv). Kiinteät kustannukset ovat 100 000 €/kk. Mikä on kuukauden tulos, kun katetuotto on 40 %?

26. Täydennä katetuottolaskelma.

	€	%
myyntituotto		
muuttuvat kustannukset		40
katetuotto	1200	
kiinteät kustannukset		
tulos		5

E1 27. Krokettipelin muuttuvat kustannukset ovat 12 €/kappale ja kiinteät kustannukset 180 000 €/vuosi. Kuukaudessa pelejä myydään 1800 kappaletta hintaan 21 €/kappale.
a) Arvioi yrityksen vuoden katetuotto ja tulos.
b) Onko toiminta kannattavaa, jos myynnin määrä laskee 15 %?

28. Laskin Oy:n valmistamien taskutietokoneiden verottomat muuttuvat kustannukset ovat 54 €/kpl ja yrityksen kiinteät kustannukset vuodessa 165 000 €. Taskutietokoneiden menekin arvioidaan olevan 2200 kappaletta vuodessa. Mikä pitää taskutietokoneen verollisen myyntihinnan olla, jotta yrityksen tulos olisi tilikauden lopussa 15 000 €? Taskutietokoneiden arvonlisäveroprosentti on 23 %.

29. Yrityksen kiinteät kustannukset ovat 38,0 % ja katetuotto on 52,0 %.
a) Mikä on yrityksen suhteellinen tulos?
b) Mikä on yrityksen suhteellinen tulos, jos kiinteät kustannukset kasvavat 8,0 % ja muuttuvat kustannukset pienenevät 2,0 %?

E2 30. Virvoitusjuomia valmistava Mehu Oy valmistaa terveysvaikutteista Vita-mehua. Vita-mehun myyntihinta jälleenmyyjille on 1,2 €/0,375 l (+ alv), muuttuvat kustannukset 1,2 €/litra ja kiinteät kustannukset 98 000 € kuukaudessa.

a) Kuinka monta pulloa (0,375 l) kuukaudessa on myytävä, jotta kaikki kustannukset tulisivat katetuksi?

b) Kuinka suuri on kuukauden myyntitulo kriittisessä pisteessä?

E3 31. Tuotteen muuttuvat yksikkökustannukset ovat 2,00 €/kappale, kiinteät kustannukset 600 € ja myyntihinta 3,00 €/kappale.

a) Muodosta kokonaiskustannusfunktio

b) Muodosta yksikkökustannusfunktio.

c) Laske tuotetta myyvän yrityksen tulos ja yksikkökustannukset, kun tuotetta myydään 26 000 kappaletta.

E4 32. Taksiyrittäjän muuttuvat kustannukset ovat 0,23 €/km ja kiinteät kustannukset 25 000 € vuodessa. Asiakkaalta veloitettava kilometrihinta on keskimäärin 1,09 €/km (+ alv).

a) Muodosta kustannusfunktio.

b) Muodosta yksikkökustannusfunktio.

c) Muodosta tulosfunktio.

d) Piirrä kannattavuuskuvaaja koordinaatistoon.

e) Kuinka monta veloitettavaa asiakaskilometriä taksiyrittäjän on vuoden aikana ajettava, jotta toiminta olisi kannattavaa?

33. Yrityksen myyntituotto riippuu myyntimäärästä x funktion $M(x) = 1{,}5x$ mukaan. Yrityksen kustannukset seuraavat myyntimäärää funktion $K(x) = 0{,}25x^2 - 16x + 400$ mukaan välillä $0 \le x \le 50$.

a) Millä myyntimäärällä saavutetaan pienimmät kustannukset?

b) Millä myyntimäärällä saavutetaan suurin tulos?

Tehtävien vastaukset

2.1 Kertaus prosenttilaskennasta

1. 18,4 %
2. Vilma
3. 52 %
4. 2,50 €
5. a) 84 % b) 46 %
6. a) 729,75 € b) 15 %
7. a) 2,0 prosenttiyksikköä
   b) 2,0 % enemmän
   c) 1,9 % vähemmän
8. a) 19,20 € pari
   b) 28 % enemmän
   c) 804 €
9. 39 %
10. Puhe Oy
11. aleni 3,2 %
12. nousivat 2,6 %
13. 2463,77 €
14. 1014,63 €
15. 124 000 €
16. a) 2063,49 €
    b) 1454,76 €
17. 36,39 €
18. 2,7 %
19. 11 %
20. a) 7,88 % b) 1,97 %
21. 2,5 %
22. a) 12,00 € b) 74,30 €
23. laski 3,4 %
24. kasvoivat 3,5 %
25. a) 94,80 € b) 80,00 €

2.2 Ansiotulojen verotus

26. a) 712,50 €
    b) 2118,09 €
27. 613,56 €
28. a) 2134 € b) 7962 €
29. a) 27,50 € b) 2974 €
30. 29863 €
31. a) 3700 € b) 3565 €
32. Minja maksoi 7,50 € enemmän
33. a) 12 404,80 €
    b) 14 365,77 €
34. 10 928,38 €
35. a) 21 920 mk
    b) 192 942 mk
36. –
37. a) 524,70 € b) 704,15 €
38. 6737,77 €
39. 52 037 €
40. 22,6 %
41. –

2.3 Muut verot

42. 1400 €
43. –
44. a) 10,50 € b) 27 €
45. 224 €
46. 13 159 €
47. a) 870 € b) 2300 €
    c) 690 €
48. 320 €
49. 45 000 €
50. –
51. b) 112 €
52. –
53. a) 0,43 €/litra b) 67 %
54. 4,67 €
55. a) 30,75 € b) 22,14 €
    c) 1,61 €
56. 3739,83 €
57. a) 560,98 €
    b) 1944,72 €
58. a) 19 % b) 8,3 %
    c) 12 %
59. a) nousee 3,7 %
    b) laskee 6,7 %
    c) nousee 8,9 %
60. karkkipussi 3,16 €, aikakauslehti 3,88 €
61. 31 422 €
62. 10,26 €/kg
63. a) 13,00 € b) 10,38 €
    c) 28,05 €
64. 2816,80 €
65. 20,55 €
66. a) 11 360 € b) 5,3 %
67. elintarvikkeet 16,48 €, vaatteet 121,12 €
68. a) viljelijä 0,29 €, tukkukauppias 0,23 €, jälleenmyyjä 0,23 €
    b) 6,52 €

3.1 Yksinkertainen korkolasku

69. a) 2,55 € b) 0,71 €
    c) 1,22 % d) 151,84 €
70. a) 0,9 % b) 403,60 €
    c) 401,20 €
71. a) 0,612 % b) 250,40 €
72. a) 20,35 € b) 15,57 €
73. a) 6,4 % b) 8,9 %
74. 1,46 %
75. 1,4 %
76. 94 päivässä
77. 3.7.
78. 229,65 €
79. 2500 €
80. 600 €
81. –
82. 15 000 €
83. 499,50 €
84. 1210,73 €
85. a) Maarin b) olisi
86. 123,84 €

87. 515 931,60 mk
88. a) 1,0584 % b) 656,88 €
c) 652,29 €
89. 120 vuorokautta
90. a) 4,9 % b) 6,8 %
91. 350 €
92. 555,06 €

3.2 Koronkorkolasku

93. a) 1102,21 €
b) 1072,73 €
94. 140,47 €
95. a) 0,79 %
b) 16 vuoden kuluttua
96. ei
97. 2,7 %
98. 3,8 %
99. 39 vuoden kuluttua
100. a) 1,40 % b) 1,94 %
101. 4017,73 €
102. 8419,73 €
103. a) $\frac{1}{1{,}023^{30}} = 1{,}023^{-30}$
b) 2527,56 €
104. 6672,93 €
105. a) vaihtoehto 2
b) vaihtoehto 1
106. 50 166,83 €
107. 1718 €
108. 281,07 €
109. 83,19 €
110. a) 1808,55 €
b) 1972,25 €
111. a) 2,3 % b) 3,2 %
112. 5224,19 €
113. 750,24 €
114. säästösumma

$$S = q_0^7 \frac{1-\left(\frac{q}{q_0}\right)^7}{1-\frac{q}{q_0}} K$$

$$= q_0 \frac{q^7 - q_0^7}{q - q_0} K$$

$$\approx 7{,}859976K$$

Kun $K = 500$ €, säästösumma on 3929,99 €.

4.1 Sijoittaminen

115. 7,7 %
116. 10,6 %
117. 2882,04 €
118. Reima
119. Säästösumman suuruus 6597,11 €, puhdas tuotto 594,35 €
120. a) 19,57 €
b) 3694,57 €
c) 394,15 €
121. a) 7803,56 €
b) 2193,44 €
122. 1° todellinen korko 3,6 %
2° vuotuinen korko 6,9 %
123. 3678,76 €
124. Arvo kasvoi 121,35 € eli 17 %.
125. noussut 22 %
126. 74,5 osuutta
127. –
128. a) laskenut 14,4 %
b) 6250 € c) 17 %
129. 1600 €
130. 15 470,23 €
131. 8500 €
132. voitolla 492,45 €
133. a) 11 470,39 €
b) 2942,68 €

4.2 Erilaisia lainoja

134. a) ensimmäinen 204,16 € viimeinen 160,74 €
b) 8000 €
135. a) 3000 €
b) ensimmäinen 4008 €, viimeinen 3036 €
136. 7,33 %
137. touko- tai kesäkuussa 2001
138. 116 351,60 €
139. a) 112 500 €
b) 62 589,40 €
140. a) 908,32 €
b) 97 496 €
141. a) 798,14 € b) 595,14 €
c) 795,50 €
142. eivät voi
143. 8350 €
144. 119 577,75 €
145. –
146. Elias 920,32 €, Aleksi 1290,13 €
147. 390 litraa
148. 26 900 bakteeria
149. a) 781,40 €
b) kasvoi 4 kuukautta
150. Elias: 44 vuotta 6 kuukautta
Aleksi: 2 vuotta ja 4 kuukautta
151. –
152. a) annuiteetti
b) annuiteetti
c) annuiteetti ja tasalyhennys
d) tasalyhennys
e) annuiteetti ja tasalyhennys
f) tasalyhennys
153. b) 2295 €
154. a) 690,41 € b) 67 123 €
155. 84 000 €
156. erän suuruus 4931,64 €
Viimeinen erä 1675,13 € maksetaan vuoden 2013 lopussa.

5.1 Valuutat

157. a) 1064,88 THB
b) 35,83 CHF
c) 239,81 SEK

158. a) 11,62 € b) 179,21 €
c) 950,13 €
159. 1151,08 SEK
652,55 AUD
671,30 USD
160. a) 774,65 €
b) 16 419,59 JPY
161. –
162. 251,17 €
163. 4151,45 SEK
164. a) 220,56 €
b) 37,45 GBP
165. 93,03 TRY
166. 1 € = 8,8875 SEK
167. 1 € = 1,1311 USD
168. –
169. a) helmikuussa 2009
b) huhtikuussa
(ja kesäkuussa) 2008
170. a) Euro on revalvoitunut Singaporen dollarin suhteen. Euro on devalvoitunut Norjan kruunun ja Tsekin korunan suhteen.
b) Singaporesta
171. a) Jeni devalvoituu 14,0 %
b) Litas revalvoituu 7,8 %
c) Forintti devalvoituu 10,5 %
172. Euro oli devalvoitunut 15 %.
173. nousi 5,3 %
174. 535,71 SEK
175. a) 200 € ja 143,39 CHF
b) 33,29 €
176. 2351,94 SEK
177. Dollari vahvistunut 14,3 %. Jeni vahvistunut 2,0 %.
178. kasvaa 19 %
179. a) nousee 4,7 %
b) laskee 4,3 %

5.2 Indeksilaskenta

180. a) 100,0; 105,1; 119,6; 105,7
b) 94,6; 99,4; 113,2; 100,0
181. a) noussut 6,7 %
b) noussut 9,7 %
c) –
182. a) noussut 15,3 %
b) laskenut 18,3 %
c) –
183. a) –
b) junamatkan
c) juna: noussut 24,2 %. linja-auto: noussut 19,6 %
184. –
185. a) – b) aravan
186. a) nousseet 12,0 %
b) laskeneet 0,6 %
187. 108,3
188. kasvaneet 9,3 %
189. uusi arvo 99,0; asumisen painoarvon laskettava 16,4 %
190. nousi 0,89 %
191. a) 18,4 % b) 14,0 %
192. –
193. b) 14,6 %
194. 38 %

5.3 Inflaatio ja rahan arvo

195. a) 41,4% b) 1,5 %
196. Venlan
197. a) 1,05 €/l b) 39 %
198. a) 15 445,70 €
b) 72 863,42 €
c) 193 630,91 €
199. a) 28 % b) 34 %
200. arvo noussut 24 %
201. a) 13,5 % b) 2079 €
202. –
203. a) 15,3 %
b) laskenut 13,2 %
204. laskenut 11 %
205. b) nimellisesti 3025 %, reaalisesti 303 %
206. a) 698,02 €
b) nimellinen muutos 395,28 €, reaalinen muutos 0 €
207. a) nousi 8,5 %
b) nousi 8,6 %
208. a) 18 % b) 5,6 %

Kertausosa

1. a) 15,58 € b) 79 %
2. 9,3 % halvemmaksi
3. laski 5,8 %
4. 1978,02 €
5. 28,6 %
6. a) 909 € b) 5812 €
7. 30 066 €
8. 33 634,29 €
9. laskivat 1,3 %
10. a) 695 € b) 1100 €
11. 42 138,89 €
12. a) 0,35 € b) 8,3 %
13. 224,33 €
14. 105 €
15. 2,9 %
16. 71,93 €
17. 1,5 %
18. 240 €
19. a) 366,13 € b) 2,80 %
20. 1200 €
21. 18 979,82 €
22. edullisempaa maksaa erissä
23. 27 742,07 €
24. 11 808,53 €
25. 9800 €
26. 2250,36 €
27. 14 500 €
28. Voitolla, salkun arvo noussut 18 %.
29. a) 280 € ja 250,63 €
b) 735 €
30. a) 1014,54 €
b) 3051,90 €

31. 103 000 €
32. 0,70 miljoonaa kuutiometriä
33. 144 kuukautta eli 12 vuotta
34. 382 €
35. a) laskee 4,8 %
    b) nousee 5,3 %
36. 127,21 USD
37. 156 000 €
38. b) 140 805 €
39. a) $f(x) = 2{,}1x + 100$
    b) indeksi 108,9 ja ero todelliseen 3,1 %
40. $9{,}7\,\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$
41. vähintään 9–
42. pienenivät 3000 €
43. laskenut 13,2 %
44. a) 0,36 €
    b) 0,92 €, 27 % pienempi

1. Harjoituskoe

1. a) 44 % b) 30 %
2. a) 11 605,41 €
   b) 11 617,25 €
3. a) 18 € b) 11 kk 3 d
4. a) molemmat 736,78 €
   b) ensimmäinen erä 863,33 €, viimeinen erä 588,00 €
5. a) 833,27 € b) 267,40 €
6. a) 3,05 € b) 4,51 €
7. a) nousi 4 %
   b) nousi 0,2 %

2. Harjoituskoe

1. 11 775,28 €
2. 21,7 %
3. tarjous A
4. a) tasalyhennyslaina 5160 € ja 3036 €, tasaerälaina 4225,71 €
   b) tasalyhennyslaina 45 000 €, tasaerälaina 57 692,76 €
5. 38 200,26 €

3. Harjoituskoe

1. a) 295,82 € b) 11 %
2. 2,64 €
3. a) 288,64 € b) 25,28 €
4. pienenee 0,3 %
5. 3,9 %
6. a) 9986,41 €
   b) 806,97 €

Ekstrat

1. a) $a_n = 3n - 11$, $a_{50} = 139$
   b) $a_n = 33 - 8n$, $a_{50} = -367$
2. a) $a_{100} = -608$
   b) $a_{100} = -285$
3. a) 12 000 b) $6\frac{1}{2}$
4. a) 536 850 b) –22 950
5. a) 500 500 b) 211 900
6. 49 jäsentä
7. a) $a_n = 250n + 400$
   b) maaliskuussa 2005
8. 8055
9. a) $a_n = 15 \cdot 2^{n-1}$, $a_7 = 960$
   b) $a_n = 4374 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $a_7 = 6$
10. 2744 %
11. $q = 2$, jolloin $a_1 = \frac{1}{4}$ tai $q = -2$, jolloin $a_1 = -\frac{1}{4}$
12. 11. jäsen
13. a) 3069 b) 88 572
14. a) 32 767 b) 3069
15. a) 334,26 b) 4162,74
16. a) 49,82 b) 20,60
17. 22 000 kg
18. 171,47 €
19. Vaihtoehto B
20. investointi ei ole kannattava
21. –
22. linja A
23. palvelun ostaminen on edullisempi vaihtoehto
24. 8,88 €/pesu on minimihinta
25. 0 €
26. –
27. a) Katetuotto 194 400 €, tulos 14 400 €
    b) Ei ole kannattavaa.
28. 167,06 €/kpl
29. a) 14 % b) 12 %
30. a) 130 667 pulloa
    b) 156 800,40 €
31. a) $K(x) = 2x + 600$
    b) $k(x) = 2 + \frac{600}{x}$
    c) Tulos 25 400 €, yksikkökustannukset 2,02 €
32. a) $K(x) = 0{,}23x + 25\,000$
    b) $k(x) = 0{,}23 + \frac{25000}{x}$
    c) $T(x) = 0{,}86x - 25\,000$
    d) –
    e) 29 070 km vuodessa
33. a) 32 kappaletta
    b) 35 kappaletta

Hakemisto

A
annuiteetti 163
annuiteettilaina 88, 91
ansiotulo 20
aritmeettinen summa 153
arvonlisävero 32

D
deflaatio 125
devalvaatio 105
differenssi 151
diskonttaus 57, 159

E
eläkevakuutus 69
emissiokurssi 71
ennakonpidätysprosentti 19
epäsuora noteeraus 101
euriborkorko 44

G
geometrinen lukujono 154
geometrinen summa 155

H
hintaindeksi 116

I
indeksi 114
indeksin pisteluku 114
inflaatio 125, 126
investointi 159

J
joukkovelkakirjalaina 71
jäsen 151
jäännösvero 21

K
katetuotto 165
kiinteä kustannus 165, 168
kirkollisvero 19, 23
korko 42
korkoaika 41
korkokanta 41
korkokausi 41
korkokerroin 52
korkomarginaali 44
korkotekijä 53
koronkorko 52, 53
kriittinen piste 167
kuluttajahintaindeksi 116, 125
kunnallisvero 19, 23

L
lahjavero 29
lukujono 151
lähdevero 41

M
muuttuvat kustannukset 165, 168
myyntikate 165
myyntituotto 165

N
nettokorko 41
nettokorkokanta 42
nettopääomatulo 28
nimellinen muutos 129
nimellisarvo 71
nykyarvo 57

O
obligaatio 71
optio 75
osake 73
osinko 74

P
pankkitalletus 68
perintövero 29
perusarvo 10
primekorko 44
prosenttikerroin 10
prosenttiyksikkö 12
pääoma 41, 53
pääomatulo 28

R
reaalinen muutos 129
revalvaatio 105
ryhmäindeksi 116

S
sijoitusrahasto 77
sijoitusvakuutus 69
suhdeluku 154
suora noteeraus 101

T
tasaerälaina 88, 91
tasalyhennyslaina 86, 91
termi 151
tulovero 19

V
valtion tulovero 21
valuutta 100
valuuttakurssi 102
veronpalautus 21
viitekorko 44
volyymi 165

Y
yleinen jäsen 150